МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ДОХОДА И ИНВЕСТИЦИЙ В УСЛОВИЯХ КРИЗИСА ПО МОДЕЛИ ГУДВИНА-КАЛЕЦКОГО-НЕЙМАРКА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

Бунин Александр Сергеевич
Главный специалист группы ипотечного кредитования отдела розничного бизнеса,
ОАО «Нордеа Банк», г. Самара
E-mail: Bunin_88@mail.ru

Недавняя рецессия глобальной экономики, и риски возникновения второй волны этого катастрофического явления в высшей степени актуализировали проблему моделирования результатов долгосрочных инвестиций в реальный сектор экономики. Целью настоящей работы является качественный модельный анализ инвестиционной деятельности крупной компании в условиях рецессии.

Система уравнений (1), предложенная в работе [1, с. 208], предназначенная для анализа социально-экономических систем, является очень гибкой и обладает большими прогностическими и объясняющими возможностями. Величина I соответствует инвестициям из собственного дохода компании. То есть при помощи модели, описываемой системой (1) невозможно учесть влияние инвестиций, привлекаемым извне.

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x - y + z)x \\ \dot{y} = (-b + dx - cy + az)y \\ \dot{z} = \begin{cases} 2F & if \;\; z > 0 \\ F(1 + signF) & if \;\; z = 0 \end{cases} \\ \dot{K}(t+\theta) = \alpha \cdot (1 - c') \cdot \dot{z} - k \cdot K \\ I(t) = \theta^{-1}[K(t+\theta) - K(t)] \end{cases}, \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} 2F = g(t)\phi(y)\dfrac{x}{1+\beta\cdot z} - (ex + fy + \gamma)\dfrac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} + D(t) \\ D(t) = \mu\cdot\exp\left(-\mu\cdot(1-c')t\right)\int\limits_0^t dt'\cdot\exp\left(\mu\cdot(1-c')t'\right)\cdot\left(I(t') + A(t') + G(t')\right) \end{cases}. \tag{2}$$

Чаще всего перед разработчиками крупных инвестиционных проектов стоит именно задача среднесрочного прогнозирования девелоперских проектов, таких, как инвестиции в масштабе торгового центра, длинной “галереи бутиков”, реконструкция улицы под торговую галерею и т.п. Для учета внешних инвестиций, модифицируем систему уравнений (1) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - qx - vy + pz)x \\ \dot{y} = (-b + dx - cy + az)y \\ \dot{z} = \begin{cases} 2F & if\;\; z > 0 \\ F(1 + signF) & if\;\; z = 0 \end{cases}, \\ \dot{K}(t+\theta) = \alpha\cdot(1-c')\cdot\dot{z} - k\cdot K \\ I(t) = \dot{K}(t) + I_{imp}(t) \end{cases} \tag{3}$$

где внешние инвестиции $I_{imp}(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial I_{imp}(\vec{r},t)}{\partial t} = D\Delta I_{imp}(\vec{r},t) + J\chi(\vec{r},t)I_{imp}(\vec{r},t) \tag{4}$$

описывающего прирост объема инвестиций на отдельном центре размножения.

Рассмотрим подробнее (4). Функция $I_{imp0}(t)$ является медленно меняющейся величиной. Соответственно, удобно искать решение в виде:

$$I_{imp}(\vec{r},t) = I_{imp0}(\vec{r}) + \delta I_{imp}(\vec{r},t). \tag{5}$$

Выражение для $I_{imp0}(t)$ получим из условия равновесия

$$D\Delta I_{imp0}(\vec{r}) + J\chi(\vec{r},t)\cdot\left\langle I_{imp0}(\vec{r})\right\rangle = 0. \tag{6}$$

из которого вытекает уравнение на $\delta I_{imp}(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial \delta I_{imp}(\vec{r},t)}{\partial t} = D\Delta\delta I_{imp}(\vec{r},t) + J\,\chi(\vec{r},t)\delta I_{imp}(\vec{r},t)\,. \qquad (7)$$

Рассмотрим несколько вариантов решения (7) в зависимости от размерности задачи и вида $\chi(\vec{r},t)$.

Рассмотрим одномерный случай, функция $\chi(\vec{r},t) = -\alpha\xi_1^{\,2} + \alpha l^2$. Этот случай соответствует инвестициям в организацию уличной торговли по модели «галерея бутиков», характерной для большинства европейских и азиатских городов. Часто подобная галерея расположена в центре города в пешеходной зоне. Очевидно, что открытие нового или серьезная реконструкция уже работавшего ранее магазина оказывает серьезное влияние на «соседей». Обычно это сопровождается рекламой, что отражается на ситуации в торговом центре в целом.

В двумерном случае

$$\Delta I_{imp0}(\xi_1,\xi_2) = -\frac{J\alpha}{D}\delta(\xi_1 + w)\delta(\xi_2 + w)\cdot\left\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\right\rangle. \qquad (8)$$

Функция Грина для двумерного оператора Лапласа имеет вид

$$G(r,t) = -\frac{1}{2\pi}\log(r)\,. \qquad (9)$$

Соответственно, решение (7)

$$I_{imp0}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\alpha J\left\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\right\rangle}{4D\pi}\ln(2w^2 + \xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + 2w(\xi_1 + \xi_2)) + C_1. \qquad (10)$$

Среднее значение $\left\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\right\rangle$ в данном случае считается численно. Решение имеет вид

$$\begin{aligned}&I_{imp}(\xi_1,\xi_2,t)=\\&=I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)-\tfrac{1}{16D^2\pi^2 t}e^{-\frac{2w^2+\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+2w(\xi_1+\xi_2)}{4Dt}}J\alpha(-1+2\theta(l))(-1+2\theta(2l))\times\\&\times\theta(-w-l\theta(-2l)+l\theta(2l))\theta(w-l\theta(-2l)+l\theta(2l))\theta\times\\&\times(-w-l\theta(-l)+l\theta(l)w-l\theta(-l)+l\theta(l))\times\\&\times\Big((C_1-\Big\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\Big\rangle)4D\pi+J\alpha\Big\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\Big\rangle\mathrm{Ln}\left(2w^2+\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+2w(\xi_1+\xi_2)\right)\Big).\end{aligned}\qquad(11)$$

С учетом того, что величина l, имеющая смысл размера торгового центра, положительна и $l>w$, получим

$$\begin{aligned}&I_{imp}(\xi_1,\xi_2,t)=\frac{\alpha J\left\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\right\rangle}{4D\pi}\ln(2w^2+\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+2w(\xi_1+\xi_2))-\\&-\tfrac{1}{16D^2\pi^2 t}e^{-\frac{2w^2+\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+2w(x+y)}{4Dt}}\alpha J\times\\&\times\Big(4D(C_1-\Big\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\Big\rangle)\pi+\Big\langle I_{imp0}(\xi_1,\xi_2)\Big\rangle J\alpha\mathrm{Ln}\left(2w^2+\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+2w(\xi_1+\xi_2)\right)\Big).\end{aligned}\qquad(12)$$

Таким образом, мы получаем направления устойчивого развития торгового центра.

В работе были проведены вычисления для двумерного случая с несколькими наборами параметров. Для оценки инвестиционного проекта было осуществлено прогнозирование поведения величин инвестиций $I(t)$, капитала $K(t)$ и дохода$z(t)$. Ниже показаны графики именно величин с несколькими наборами параметров и координат. Данные графики получены при параметрах $q=0,001$, $v=0,001$, $p=0,001$, $b=0,001$, $d=0,001$, $c=0,001$, $a=0,001$, $g=2$, $\varepsilon_1=2$, $\varepsilon_2=2$, $\beta=0,3$, $e=0,015$, $f=0,015$, $\gamma=0,015$, $\delta_1=3$, $\delta_2=1$, $\mu=1$, $c'=1$, $\alpha=0,11$, $k=0,04$, $D=10$, $J=1$, $l=50$, $INFL=0,01$. Также проиллюстрируем кризисные ситуации и рост в системе.

Рисунки 1 и 2 соответствуют кризису. Эти графики получены при ρ равном 0,1, $\xi_1=20$, $\xi_2=20$. Также приведем графики для растущей системы. Коэффициент $\rho=0,18324$.

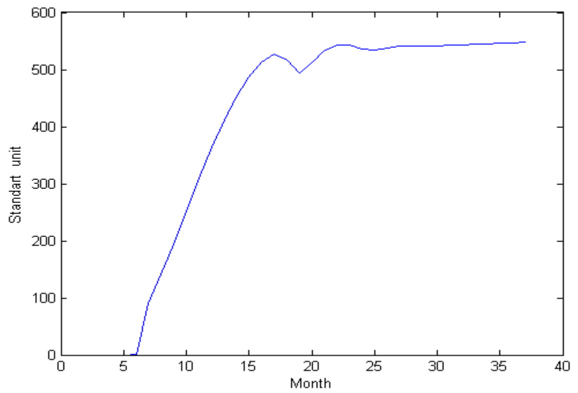

Рис. 1. Динамика дохода в кризисной ситуации в двумерном случае

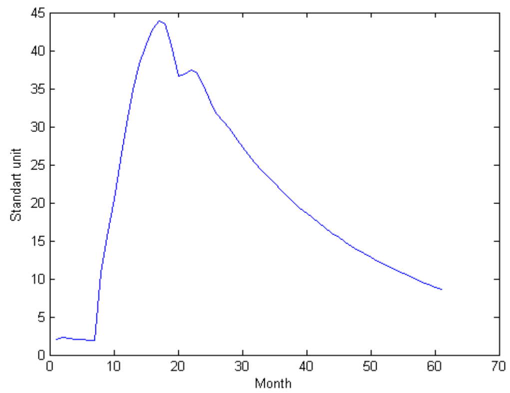

Рис. 2. Динамика капитала при кризисе в двумерном случае

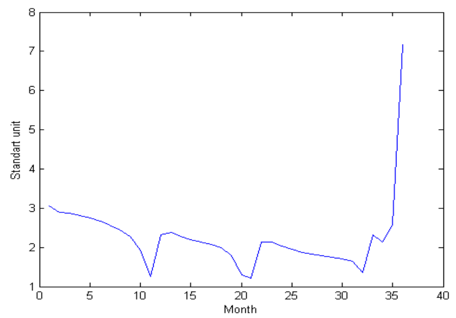

Рис. 3. Динамика инвестиций в ситуации роста в двумерном случае

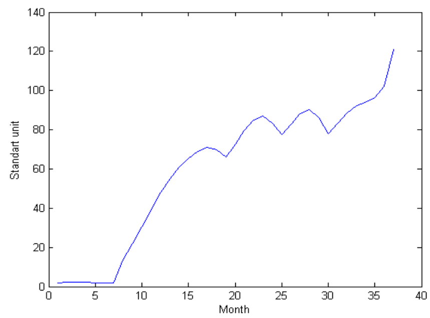

Рис. 4. Динамика капитала в ситуации роста в двумерном случае

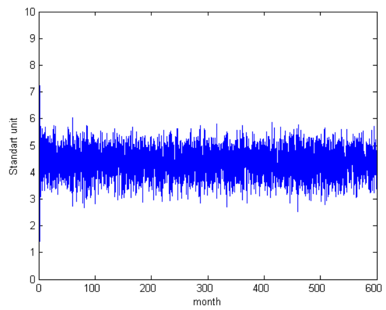

Рис. 5. Динамика дохода при динамическом хаосе

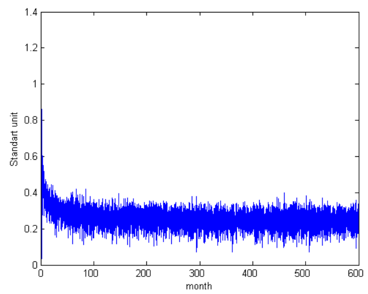

Рис. 6. Динамика инвестиций при динамическом хаосе

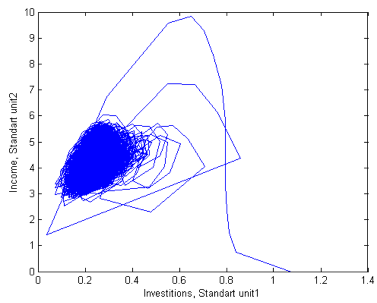

Рис. 7. Инвестиции как функция планового дохода

Также представлены результаты численного моделирования со случайными параметрами системы. Данные графики получены при параметрах $q = 0,3$, $v = 0,1$, $p = 0,1$, $b = 0,1$, $d = 0,1$, $c = 0,1$, $a = 0,15$, $g = 2$, $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 2$, $\beta = 0,5$, $e = 0,15$, $f = 0,15$, $\gamma = 0,15$, $\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 1$, $\mu = 1$, $c' = 1$, $\alpha = 0,11$, $k = 0,04$, $D = 10$, $J = 1$, $l = 50$, $\xi = 0$, $INFL = 0,01$, α - равномерно распределенная величина с математическим ожиданием $0,055$. Такой режим схож с динамическим хаосом. Он обладает свойствами перемежаемости и устойчивостью по Пуассону. Для демонстрации свойств данного режима, в данном случае осуществляем построение не на 36 месяцев, а на не вполне реалистичный период 500 месяцев.

Таким образом, в работе осуществлено моделирование достаточно крупных инвестиций в условиях рецессии. Показано, что даже в этом случае, и даже при наличии случайных внешних факторов, существуют сценарии устойчивого развития инвестиционных проектов.

Выводы

1. При моделировании поведения экономической системы в условиях рецессии необходимо учитывать наличие случайных факторов.
2. Поведение моделируемой системы с математической точки зрения представляет собой динамический хаос.
3. Даже в этих условиях возможно прогнозирование динамики системы и разработка сценария устойчивого развития.

Список литературы:

1. Ратис Ю.Л. Адиабатическое приближение для модели Неймарка-Гудвина-Калецкого// Обозрение прикладной и промышленной математики, т.10, вып.1.- М.: ТВП, 2003.- с. 208.