ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПАКЕТА РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Гордуновский В.М.

Канд. техн. наук, доцент МГИМО (Университет) МИД России, г. Москва

Самохвалов С.Ю.

Доцент МГИМО (Университет) МИД России, г. Москва
E-mail: gordunovski@rambler.ru

Одной из главных составляющих процесса анализа инвестиционных проектов является анализ их коммерческой эффективности. На основе построения математической модели пакета предполагаемых инвестиций и применении критериев эффективности, использующих дисконтированные денежные потоки, рассматривается метод оптимизации пакета реальных инвестиций [1]. Исходными данными математической модели являются: денежный поток C_{it}, где i – номер инвестиционного проекта (изменяется от *1* до *m*), t – интервал времени (изменяется от *0* до *T*), r – ставка процента. Для построения математической модели обозначим неизвестные. За x_i примем долю финансового участия компании-инвестора в финансировании i-го проекта ($0 \le x_i \le 1$). Среди критериев эффективности пакета реальных инвестиций доминирующую роль играют следующие:

1) Сумма дисконтированных чистых поступлений *NPV*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge npv_p$, где npv_p - предельная сумма дисконтированных чистых поступлений;

2) Внутренняя норма доходности *IRR*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0$, где cc – средневзвешенная стоимость капитала;

3) Индекс рентабельности *PI*:

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}\dfrac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0,C_{it}<0}^{T}\dfrac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t}} \ge pi_p$, где pi_p - предельное значение индекса рентабельности;

4) Дисконтный срок окупаемости *DPP*:

$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0}^{dpp_p}\dfrac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge 0$, где dpp_p - предельное значение срока окупаемости.

5) Сумма наращенных чистых поступлений *NTV*:

$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \ge ntv_p$, где ntv_p - предельная сумма наращенных чистых поступлений;

6) Модифицированная внутренняя норма доходности *MIRR* (применяется в тех случаях, когда в пакете из *m* рассматриваемых инвестиций, присутствуют проекты с неординарными денежными потоками):

$\dfrac{\sqrt[T]{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i}}{\sqrt[T]{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{t=0,C_{it}<0}^{T}\dfrac{|c_{it}|x_i}{(1+cc)^t}}} \ge 1+cc$ (*cc* – средневзвешенная стоимость капитала).

Для построения оптимизационной задачи возьмём один из критериев в качестве целевой функции, а остальные в виде ограничений. Так, если *NPV* – целевая функция, то с учётом ограничений по сумме инвестиций по периодам *t* (обозначим b_t - предельные суммы инвестиций по периодам *t*) получим следующую линейную модель формирования оптимального пакета инвестиций.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \to \max .$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0 .$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}+pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0 .$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0 .$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i\geq ntv_p .$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i+(1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0 .$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\leq b_t .$$

Долевые условия:

$$x_i\geq 0;\ x_i\leq 1;\ i=1,...,m .$$

Если в качестве целевой функции выбран индекс рентабельности (нелинейная функция), то задача приводится к линейной путём введения новых переменных:

$$z_0=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t}};\ z_i=z_0x_i$$

После подстановки переменных z_0, z_i вместо x_i получаем линейную задачу оптимизации пакета реальных инвестиций по критерию максимума индекса рентабельности.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}\to\max .$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-(npv_p)z_0\geq 0 .$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+cc)^t}\geq 0 .$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}\geq 0 .$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}z_i-(ntv_p)z_0\geq 0 .$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}z_i+(1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+cc)^t}\geq 0 .$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1, C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1, C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-b_t z_0\leq 0 .$$

Зависимость, связывающая переменные z_i между собой:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|z_i}{(1+r)^t}=1 .$$

Долевые условия:

$$z_0 \geq 0;\ z_i \geq 0; z_i \leq z_0;\ i = 1,...,m.$$

После определения оптимальных значений z_i и z_0 доли участия в инвестиционных проектах x_i вычисляются по формулам $x_i = \frac{z_i}{z_0}$, *i=1,…,m.*

Линейная модель с внутренней нормой доходности в качестве целевой функции имеет вид:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \to \max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq npv_p.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \geq ntv_p.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i + (1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \geq 0.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} - \sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \leq b_t.$$

Долевые условия:

$$x_i \ge 0;\; x_i \le 1;\; i = 1,\dots,m\,.$$

При оптимизации по критерию суммы наращенных чистых поступлений математическая модель имеет следующий вид:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \to \max\,.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge npv_p\,.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0\,.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge 0\,.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge 0\,.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i + (1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0\,.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\ge 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} - \sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \le b_t\,.$$

Долевые условия:

$$x_i \ge 0;\; x_i \le 1;\; i = 1,\dots,m\,.$$

Если в качестве целевой функции взять модифицированную внутреннюю норму доходности, то получим следующую задачу:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i+(1+cc)^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\rightarrow \max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq npv_p.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}+pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0, C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i\geq ntv_p.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1, C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1, C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\leq b_t.$$

Долевые условия:

$$x_i\geq 0;\; x_i\leq 1;\; i=1,\ldots,m.$$

Задачи оптимизации пакета инвестиций решаются с помощью табличного процессора “Excel”, либо с помощью специальной компьютерной программы ”Оптимум”, разработанной в МГИМО.

Повышению обоснованности принимаемых инвестиционных решений способствуют следующие результаты данной работы. Обобщённая математическая постановка позволяет применить одновременно большое количество критериев эффективности для формирования оптимального пакета инвестиций из множества проектов с заданными денежными потоками. Линейная постановка позволяет для получения оптимального решения ограничиться широко распространёнными алгоритмами линейного программирования.

Список литературы:

1. Российская экономика: пути повышения конкурентоспособности: коллективная монография/Моск. гос. инст-т междунар. отнош. (Университет) МИД России; отв. ред.: А.В.Холопов. -М. : Издательский дом Журналист, 2009. -690 с.