



ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам
XXXIII международной научно-практической конференции*

№ 8 (32)
Август 2015 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск
2015

УДК 50
ББК 20
Е 86

Ответственный редактор: Гулин А.И.

Председатель редакционной коллегии:

Козьминых Владислав Олегович — д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

Гукалова Ирина Владимировна — д-р геогр. наук, доц. ведущий научный сотрудник Института географии НАН Украины, профессор кафедры социально-экономической географии Херсонского государственного университета;

Данилов Виктор Павлович — канд. с.-х. наук, зам. дир. по научной работе СибНИИ кормов СО Россельхозакадемии;

Елисеев Дмитрий Викторович — канд. техн. наук, доцент, бизнес-консультант Академии менеджмента и рынка, ведущий консультант по стратегии и бизнес-процессам, «Консалтинговая фирма «Партнеры и Боровков»;

Зеленская Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. доц. кафедры высшей математики Югорского государственного университета;

Королев Владимир Степанович — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Ларионов Максим Викторович — д-р биол. наук, проф. кафедры биологии и экологии Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета, член-корреспондент Российской Академии Естествознания, г. Балашов.

Романова Алла Александровна — канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной физики Санкт-Петербургского государственного экономического университета;

Рымкевич Павел Павлович — канд. физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры физики Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, чл.-кор. Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы, член Экспертного совета по энергоэффективности зданий и сооружений Санкт-Петербурга;

Сүлеймен Ерлан Мэлсұлы — д-р филос. наук, канд. хим. наук, директор ин-та прикладной химии при Евразийском национальном университете им. Л.Н. Гумилева;

Харченко Виктория Евгеньевна — канд. биол. наук, ст. науч. сотр. отдела флоры Дальнего Востока, Ботанический сад-институт ДВО РАН;

Яковишина Татьяна Федоровна — канд. с.-хоз. наук, доц., заместитель заведующего кафедрой экологии и охраны окружающей среды Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, член Всеукраинской экологической Лиги.

Е 86 Естественные и математические науки в современном мире / Сб. ст. по материалам XXXIII междунар. науч.-практ. конф. № 8 (32). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2015. 82 с.

Учредитель: НП «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

Оглавление	
Секция 1. Математика	6
1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ	6
МЕМБРАНЫ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ Пешкичев Юрий Афанасьевич	6
1.2. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление	13
ТРАЕКТОРИИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ВЫСОКОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ Островский Илья Борисович	13
1.3. Математическая физика	27
СОЛИТОН-АНТИСОЛИТОННАЯ ПАРА КАК РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН Хусаинова Галина Владимировна Хусаинов Дамир Зиннурович Сагарадзе Игорь Викторович	27
1.4. Дискретная математика и математическая кибернетика	35
ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ГРАФ ЗАДАЧИ ОБ ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ Бондаренко Владимир Александрович Николаев Андрей Валерьевич Шовгенов Джамболет Азаматович	35
Секция 2. Информационные технологии	41
2.1. Системы автоматизации проектирования	41
ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ UNIGRAPHICS NX ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ Хусаинов Рустем Мухаметович Мавзутова Гузель Рамисовна	41

Секция 3. Физика	46
3.1. Физика конденсированного состояния	46
МОДЕЛИ ПРЫЖКОВОГО ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА КАК ЕДИНАЯ ОСНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ПОЛЯРИЗАЦИИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ Ханин Самуил Давидович Рябокоть Дарья Владимировна	46
Секция 4. Биология	53
4.1. Биохимия	53
БИОХИМИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ БОЛЕЗНИ ГИАЛИНОВЫХ МЕМБРАН НОВОРОЖДЕННЫХ Королева Анна Викторовна Гимаутдинова Ольга Ивановна	53
4.2. Почвоведение	58
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОЧВЕННО-ЭРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ Дитц Людмила Юрьевна Катункина Евгения Владимировна	58
4.3. Физиология	65
УВЕЛИЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБРАБОТКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СТРУКТУРНО-ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ Артемов Станислав Игоревич	65
ТОТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ТЕЛА ЮНОШЕЙ, ЗАНИМАЮЩИХСЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ВИДАМИ СПОРТА В УСЛОВИЯХ СЕВЕРА Семенова Анастасия Александровна	72

Секция 5. Науки о Земле	76
5.1. Картография и геоинформатика	76
ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ МОНИТОРИНГА ПОДЗЕМНЫХ ВОД	76
Катункина Евгения Владимировна Дитц Людмила Юрьевна	

СЕКЦИЯ 1.

МАТЕМАТИКА

1.1. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

МЕМБРАНЫ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пешкичев Юрий Афанасьевич

*канд. физ.-мат. наук, исследователь,
РФ, г. Бердск*

E-mail: peshyur@inbox.ru

MEMBRANE IN A MULTIDIMENSIONAL SPASE

Yuriy Peshkichev

*candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Russia, Berdsk*

АННОТАЦИЯ

Моделируются виртуальные движения мембран на основе рассмотрения связанных с ними скалярных полей.

ABSTRACT

Simulated virtual movement of the membranes based on the consideration of the associated scalar fields.

Ключевые слова: плосковыпуклая линза; веретенообразная область; скалярное поле; поверхность уровня.

Keywords: plano-convex lens; fusiform region; scalar field; surface level.

В современной теоретической физике рассматриваются колебания струн и мембран в многомерном пространстве. При этом до последнего времени не были задействованы результаты по геометрической теории скалярного поля в многомерном евклидовом пространстве. С целью устранения наметившейся диспропорции в статье моделируется виртуальное движение мембран на основе связанных с ними скалярных полей. При этом используется новая методика исследования гладкого скалярного поля, разработанная автором в книге [5]. В трёхмерном пространстве порождающее скалярное поле можно выбрать так, что получится фаза реального колебания мембраны. Струна рассматривается как предельный случай мембраны веретенообразного типа. Общее понятие о струнах и мембранах здесь достаточно представлять по книге С. Габсера [2]. Примеры же современного математического подхода к колебаниям мембран содержатся в статье Г.М. Глинского [3]. А необходимые для доказательств сведения по вещественному анализу содержатся в лекциях Б.М. Макарова и его соавтора А.Н. Подкорытова [4].

1. Плосковыпуклая линза как заметаемая область В многомерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n с декартовыми координатами x_1, x_2, \dots, x_n рассмотрим также цилиндрические координаты (ρ, φ, z) , где $z = x_n$ и (ρ, φ) — сферические координаты в гиперплоскости $x_n = 0$. Линзой в многомерном пространстве \mathbb{R}^n назовём открытую область

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n: \rho < 1, 0 < z < g(\rho)\},$$

где $g(\rho)$ — гладкая функция на отрезке $0 \leq \rho < 1$, убывающая на нём до нуля. Основанием линзы G служит диск

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: \rho < 1, z = 0\}.$$

Верхней же поверхностью введённой линзы G является гиперповерхность

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n: \rho < 1, z = g(\rho)\}.$$

Рассмотрим в области G гладкое скалярное поле

$$u(M) = \frac{z}{g(\rho)}$$

с нулевым граничным значением на основании Ω и единичным граничным значением на верхней поверхности S , для которого

поверхность уровня $u^{-1}(\tau)$ гомеоморфна основанию Ω . При увеличении параметра τ от нуля до единицы рассматриваем теперь гиперповерхности $u^{-1}(\tau)$ как положения $m(\tau)$ мембраны \mathcal{M} при её виртуальном движении из исходного положения Ω в конечное положение S . Линза G представляет тогда собой заметаемую мембраной часть пространства \mathbb{R}^n . В случае реальных малых колебаний круглой мембраны в физическом пространстве одна из стоячих волн порождается скалярным полем

$$u(M) = \arccos \frac{z}{\varepsilon J(\mu\rho)},$$

где: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $J(\mu\rho)$ — функция Бесселя первого рода порядка ноль,

μ — её первый корень,

ε — малое положительное число. Геометрическая теория функций предлагает несколько числовых характеристик виртуального движения мембраны, использование здесь которых основано на Синтегральном свойстве градиента скалярного поля

$$\iiint f(M) |gradu| dG = \int_{u(\sigma)} dr \iint_{m(r)} f(M) d\sigma,$$

известном как теорема о послыном интегрировании (криволинейная теорема Фубини, теорема А.С. Кронрода-Г. Федерера [4, с. 391]). Процесс виртуального движения мембраны характеризуется интегралом Дирихле

$$D(u, G) = \iiint |gradu|^n dG.$$

При этом проявляется след интеграла Дирихле на поверхности уровня скалярного поля

$$D(u, G, r) = \iint_{m(r)} |gradu|^{n-1} d\sigma,$$

для которого по теореме о послыном интегрировании выполняется равенство

$$D(u, G) = \int_0^1 D(u, G, r) dr.$$

Упомянутый процесс виртуального движения мембраны характеризуется также модулюсом $\text{Mod}\Sigma$ семейства Σ всех поверхностей уровня $u^{-1}(r)$, где

$$\text{Mod}\Sigma = \inf \iiint \mu(M)^n dG,$$

а весовая функция $\mu(M) \geq 0$, относительно которой берётся здесь точная нижняя грань, для почти всех значений $r \in (0,1)$ обладает свойством

$$\iint_{m(r)} \mu(M)^{n-1} d\sigma \geq 1.$$

Формально весовая функция $\mu(M)$ является скалярным полем, однако без требования гладкости и без рассмотрения его градиента. Особую роль в определении модулюса играет экстремальная весовая функция

$$\tilde{\mu}(M) = |\text{gradu}|/D(u,G,r)^{1/(n-1)}.$$

В самом деле, так как для почти всех значений $r \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\iint_{m(r)} \tilde{\mu}(M)^{n-1} d\sigma \geq 1,$$

то по теореме о послыном интегрировании получается верхняя оценка

$$\begin{aligned} \text{Mod}\Sigma &\leq \iiint \tilde{\mu}(M)^n dG = \\ &= \int_0^1 dr \iint_{m(r)} |\text{gradu}|^{n-1} D(u,G,r)^{n(1-n)} d\sigma = \\ &= \int_0^1 D(u,G,r)^{1/(1-n)} dr. \end{aligned}$$

С другой же стороны, для всякой допустимой в определении модулюса функции $\mu(M)$ при почти всех значениях $r \in (0,1)$ будет

$$\iint_{m(r)} (\mu(M)^n / |\text{gradu}|) d\sigma \geq D(u,G,r)^{1/(1-n)},$$

что следует из тождества

$$\mu(M) \equiv |\text{gradu}|^{1/n} \mu(M) / |\text{gradu}|^{1/n}$$

после применения неравенства Гёльдера к поверхностному интегралу

$$\iint_{m(r)} \mu(M)^{n-1} d\sigma$$

По теореме о послыном интегрировании

$$\iiint \mu(M)^n dG \geq \int_0^1 D(u, G, r)^{1/(1-n)} dr.$$

В результате у нас получается вычислительная формула для модулюса

$$\text{Mod}\Sigma = \int_0^1 D(u, G, r)^{1/(1-n)} dr.$$

Виртуальное движение мембраны можно охарактеризовать также ещё интегралом кривизны скалярного поля $u(M)$ в области G

$$J(u, G) = \iiint |k|^{n(n-1)} dG,$$

где: k — полная кривизна поверхности уровня $u^{-1}(r)$ в точке $M \in u^{-1}(r)$.

Теорема. Если рассмотреть гауссово изображение $N(r)$ поверхности уровня $u^{-1}(r)$ на сфере единичного радиуса в \mathbb{R}^n , то

$$J(u, G)^{n-1} D(u, G) \geq \left(\int_0^1 \text{mes}_{n-1} N(r) dr \right)^n.$$

Доказательство. Так как полная кривизна поверхности уровня $u^{-1}(r)$ служит касательным якобианом гауссова отображения

$$N: u^{-1}(r) \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\},$$

то для почти всех значений $r \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\iint_{m(r)} |k| d\sigma \geq \text{mes}_{n-1} N(r).$$

По теореме о послыном интегрировании тогда

$$\int_0^1 \text{mes}_{n-1} N(r) dr \leq \iiint |\text{gradu}| \cdot |k| dG.$$

Далее остаётся применить неравенство Гёльдера в кратном интеграле.

2. Веретенообразная область заметания

Пусть теперь открытая область G в \mathbb{R}^n , заматаемая мембраной при её виртуальном движении, ограничена поверхностью вращения $\rho = g(|z|)$. Упомянутое вращение происходит вокруг оси координат Ox_n в случае нечётного числа n . Тогда область G будет задана условием

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 < |z| < 1, \rho < g(|z|)\}.$$

Стержнем области G назовём отрезок

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n: |z| < 1, \rho = 0\}.$$

При этом поверхность веретенообразной области G задаётся условием

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 < |z| < 1, \rho = g(|z|)\}.$$

Рассмотрим в области G гладкое скалярное поле

$$u(M) = \frac{\rho}{g(|z|)}$$

с нулевым граничным значением на стержне L и единичным граничным значением на поверхности S . При этом все поверхности уровня $u^{-1}(r)$ гомеоморфны поверхности S , кроме значения $r = 0$, когда поверхность уровня сворачивается в стержень L . При увеличении параметра r от нуля до единицы мембрана $m(r)$ совершает виртуальное движение из своего сингулярного положения L в обычное положение S . Используя теперь терминологию книги [2, с. 136], мы отмечаем новый тип сворачивания $D(n-1)$ — браны в $D1$ — брану. Виртуальное движение рассмотренного типа мембран можно так же охарактеризовать перечисленным в п. 1 набором числовых характеристик. В физическом трёхмерном пространстве такой тип колебаний мембраны, скорее всего, вообще не рассматривался.

3. Заполненный тор вращения с $(n-1)$ — мерным сечением в форме серповидной линзы как заматаемая область

Для катеноида в \mathbb{R}^n , имеющего уравнение $\rho = \rho(|z|)$, рассмотрим открытую область

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n: |z| < a, \rho(|z|) < \rho < \rho(|z|) + g(|z|/a)\},$$

где функция $\rho(t)$ взята из п. 1. Для $4 \leq n \leq 26$ приведённое определение будет корректно при достаточно малом значении $a > 0$ [1]. Затем порождающее скалярное поле определяем формулой

$$u(M) = 1/(1 + g(|z|/a)/\rho(|z|)).$$

Тогда при увеличении параметра τ от нуля до единицы гиперповерхность $u^{-1}(\tau)$ совершает виртуальное движение из положения на катеноиде до своего предельного возмущённого положения. В физическом трёхмерном пространстве катеноид как мембрана рассмотрен в работе [3], где для него получено дифференциальное уравнение колебаний.

Список литературы:

1. Веденяпин А.Д., Миклюков В.М. Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей // Математ. сб. — 1986. — Т. 131 (173). — № 2(10). — С. 240—250.
2. Габсер С. Маленькая книга о большой теории струн. — СПб. : Питер, 2015. — 208 с.
3. Глинский Г.М. К теории малых колебаний произвольно искривлённых мембран // ЖТФ. — 2000. — Т. 70. — Вып. 1. — С. 10—14.
4. Макаров Б.М. Лекции по вещественному анализу / Б.М. Макаров, А.Н. Подкорытов. — СПб.: БХВ – Петербург, 2011. — 688 с.
5. Пешкичев Юрий. Кривизна в теории поля. Скалярные и векторные поля на плоскости и в многомерном пространстве. LAP LAMBERT Academic Publishing (2015.04.15). — 104 с.

1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ТРАЕКТОРИИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ВЫСОКОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ

Островский Илья Борисович

*ассистент кафедры «Высшая математика»
Алтайского государственного технического университета,
РФ, г. Барнаул
E-mail: ilostr120686@gmail.com*

TRAJECTORIES POSSESSING HIGH PARAMETRIC SENSIBILITY ARISING IN THE CLASS OF SINGULAR PERTURBED SYSTEMS

Ilya Ostrovskiy

*post-graduate student of "Higher Mathematics" Chair,
Altay State Technical University,
Russia, Barnaul*

АННОТАЦИЯ

Исследуются пучки траекторий, обладающих высокой параметрической чувствительностью, так называемых траекторий-уток, возникающие в одном классе сингулярно возмущенных систем с одной медленной и одной быстрой переменными и малым параметром ε . В качестве приближения пучка траекторий-уток на участке их движения вдоль медленной кривой, предлагается кривая, заданная параметрически, дающая оценку отклонения пучка от медленной кривой и приближающая его с порядком $O(\varepsilon^2)$.

ABSTRACT

Beams of trajectories possessing high parametric sensitivity, so-called duck trajectories, arising in one class of singularly perturbed systems

with one slow and one fast variable and a small parameter ε are under study. As an approximation of the beam duck trajectories in the area of their movement along the slow curve, the curve is offered prescribed parametrically, giving an assessment of the slow beam deflection curve and bringing it to the order $O(\varepsilon^2)$.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; медленная кривая; траектории-утки.

Keywords: singular perturbation; slow variable; duck trajectory.

В настоящей работе рассматривается класс сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon^{-1}(y - f(x)) \\ \dot{y} = a - x \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ - малый параметр, $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ — дополнительный параметр.

Причем еще предполагается, что функция f всюду выпукла книзу, т. е. $f''(x) > 0$ при всех x , и имеет единственную точку минимума x_0 , т. е. $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x_0) > 0$ при $x > x_0$.

Система (1) задает так называемое быстро-медленное векторное поле с одной быстрой переменной x и одной медленной переменной y . Практически во всех точках фазовой плоскости (x, y) $\dot{x} \gg \dot{y}$.

Множество точек на фазовой плоскости (x, y) , в которых скорость быстрой переменной обращается в нуль, т. е. $\dot{x} = 0$, называется медленной кривой. В нашем случае медленная кривая есть график функции $y=f(x)$. Участок графика, где $f(x)$ возрастает, является притягивающим (т.е. локально в окрестности этого участка быстрое движение направлено к нему), а участок графика, где $f(x)$ убывает, является отталкивающим (т. е. в окрестности этого участка быстрое движение направлено от него).

Для системы (1) известны следующие интересные результаты (см. [1] и [3]).

При малых ε существует интервал (a_1, a_2) порядка $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, расположенный в окрестности порядка $O(\varepsilon)$ точки минимума x_0 , такой, что когда $a \in (a_1, a_2)$ система (1) имеет целые пучки так называемых траекторий-уток — траекторий, проходящих вначале длительное (порядка единицы) расстояние вдоль притягивающей ветви медленной кривой, а затем длительное (порядка единицы) расстояние

вдоль отталкивающей ветви медленной кривой. Причем для любого отрезка $[c_1, c_2]$, содержащего точку минимума x_0 существует соответствующее значение $\bar{a} \in (a_1, a_2)$, такое, что при $a = \bar{a}$ система (1) имеет пучок траекторий-уток, проходящих вдоль медленной кривой на отрезке $[c_1, c_2]$. Все траектории-утки экспоненциально близки между собой на участке движения вдоль медленной кривой. Т. е., если у нас есть две траектории-утки, соответствующие одному и тому же или разным значениям $a \in (a_1, a_2)$, то на участке, где обе траектории движутся вдоль медленной кривой, расстояние между ними есть величина порядка $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$.

Проблема численного нахождения траекторий-уток при малых ε заключается в том, что область значений параметра a , отвечающих уткам, является невероятно узкой: если предположить, например, что ε имеет порядок 10^{-5} , то, чтобы «поймать» утку, требуется проводить вычисления с точностью, приближенно оцениваемой числом $e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = e^{-10^5} \approx 10^{-43\,000}$, т. е. учитывать более 40 000 знаков после запятой. Поэтому при малых значениях ε для траекторий-уток приходится довольствоваться приближенными вычислениями.

В настоящей работе в качестве приближения пучка траекторий-уток, движущихся вдоль медленной кривой на отрезке $[c_1, c_2]$, содержащем точку минимума x_0 (этот отрезок может иметь сколь угодно большую длину), предлагается кривая, заданная параметрически, дающая оценку отклонения пучка от медленной кривой (на фазовой плоскости (x, y) пучок траекторий-уток проходит выше данной кривой) и приближающая его при $\varepsilon \rightarrow 0$ с порядком $O(\varepsilon^2)$.

Далее мы не будем сразу же предъявлять нашу кривую. Вместо этого мы приведем ряд рассуждений, последовательно приводящий нас к ее построению.

Сразу скажем, что, так как мы изучаем траектории-утки системы (1) при малых ε , то предполагается, что параметр $a \approx x_0$ (если быть точнее, то величина $|a - x_0|$ есть величина порядка ε).

Далее заметим, что изоклины системы (1) находятся в явном аналитическом виде.

Изоклина горизонтальных наклонов $\dot{y} = 0$ есть вертикальная прямая $x = a$.

Изоклина вертикальных наклонов $\dot{x} = 0$ есть кривая $y = f(x)$, т. е. медленная кривая.

Изоклина, соответствующая конечному ненулевому наклону k , находится из соотношения: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = k$ и есть кривая $y_k(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{k}(a - x)$. Она также как и медленная кривая всюду выпукла книзу

$y''_k(x) = f''(x) > 0$ и имеет единственную точку минимума, x_k^{min} , которая находится, как корень уравнения $f'(x) = \frac{\varepsilon}{k}$. Варьируя k в пределах $-\infty < k < +\infty$, мы получим однопараметрическое семейство изоклин, задаваемое (за исключением случая, когда $k=0$) уравнением: $y(x, k) = f(x) + \frac{\varepsilon}{k}(a - x)$.

Заметим, что т. к. $\frac{\partial y(x, k)}{\partial k} = -\frac{\varepsilon}{k^2}(a - x)$, то в той части фазовой плоскости, где $x < a$, изоклина, соответствующая меньшему наклону k будет располагаться выше изоклины, соответствующей большему наклону k , а в той части, где $x > a$, наоборот, изоклина, соответствующая меньшему наклону k будет располагаться ниже изоклины, соответствующей большему наклону k . Заметим также, что абсцисса, точки касания изоклины, соответствующей наклону k , с векторным полем, $\psi(k)$, находится, как корень уравнения $f'(x) = k + \frac{\varepsilon}{k}$. В общем случае он может быть найден численно с заданной точностью.

Далее сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма 1. При малых значениях ε , множество точек касания с векторным полем изоклин, соответствующих отрицательным наклонам k : $S_1 = \{(x, y) \mid x = \psi(k), y = y_k(\psi(k)), k < 0\}$ будет располагаться в области $Q_1 = \{(x, y) \mid x < a, y < f(x)\}$, а множество точек касания с векторным полем изоклин, соответствующих положительным наклонам k :

$S_2 = \{(x, y) \mid x = \psi(k), y = y_k(\psi(k)), k > 0\}$, будет располагаться в области

$$Q_2 = \{(x, y) \mid x > a, y < f(x)\}.$$

Доказательство. Продифференцировав обе части равенства $f'(\psi(k)) = k + \frac{\varepsilon}{k}$, получим: $\psi'(k) = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{k^2}}{f''(\psi(k))}$ (2). Тогда в силу того, что при всех x $f''(x) > 0$, на интервале

$-\infty < k < 0$, функция $\psi(k)$ ведет себя следующим образом: она возрастает, когда $-\infty < k < -\sqrt{\varepsilon}$, убывает, когда $-\sqrt{\varepsilon} < k < 0$ и имеет точку максимума при $k = -\sqrt{\varepsilon}$.

На интервале $0 < k < +\infty$, $\psi(k)$ убывает, когда $0 < k < \sqrt{\varepsilon}$, возрастает, когда $\sqrt{\varepsilon} < k < +\infty$ имеет точку минимума при $k = \sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, среди точек из множества S_1 наибольшее значение абсциссы будет иметь точка $(\psi(-\sqrt{\varepsilon}), y_k(\psi(-\sqrt{\varepsilon})))$, а среди точек из множества S_2 наименьшее значение абсциссы будет иметь точка $(\psi(\sqrt{\varepsilon}), y_k(\psi(\sqrt{\varepsilon})))$.

Т. к. $f'(\psi(-\sqrt{\varepsilon})) = -2\sqrt{\varepsilon}$, а $f'(x_0) = 0$, то по теореме Лагранжа имеем:

$x_0 - \psi(-\sqrt{\varepsilon}) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{f''(\xi)}$, где $\xi \in (\psi(-\sqrt{\varepsilon}), x_0)$. Т. к. функция $f''(x) > 0$ и непрерывна на отрезке

$[\psi(-\sqrt{\varepsilon}), x_0]$, то по теореме Вейерштрасса, существуют числа $m > 0$ и $M > 0$, такие, что

$0 < m \leq f''(x) \leq M$ на отрезке $[\psi(-\sqrt{\varepsilon}), x_0]$. Тогда имеем:

$\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{M} \leq x_0 - \psi(-\sqrt{\varepsilon}) \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{m}$. Следовательно, при малых ε величина $x_0 - \psi(-\sqrt{\varepsilon})$ есть величина порядка $\sqrt{\varepsilon}$, а т. к., как уже говорилось выше, величина $|a - x_0|$ есть величина порядка ε , то при малых ε точка $(\psi(-\sqrt{\varepsilon}), y_k(\psi(-\sqrt{\varepsilon})))$ будет располагаться в области Q_1 , а значит и все точки из множества S_1 будут располагаться в области Q_1 . Абсолютно аналогично показывается, что величина $\psi(\sqrt{\varepsilon}) - x_0$ есть величина порядка $\sqrt{\varepsilon}$, а значит при малых ε , точка $(\psi(\sqrt{\varepsilon}), y_k(\psi(\sqrt{\varepsilon})))$ будет располагаться в области Q_2 , а значит, и все точки из множества S_2 будут располагаться в области Q_2 . Лемма доказана.

Рассмотрим теперь, касательную к изоклине $y_k(x)$, соответствующей отрицательному наклону k , проведенную в точке $(\psi(k), y_k(\psi(k)))$ касания изоклины с векторным полем.

Ее уравнение имеет вид: $L_1(x, y, k) = y - kx + k\psi(k) - y_k(\psi(k)) = 0$. (3)

В силу выпуклости книзу изоклины $y_k(x)$, касательная $L_1(x, y, k) = 0$ при $x \neq \psi(k)$ будет располагаться ниже изоклины $y_k(x)$. Тогда в силу того, что в области Q_1 изоклины, соответствующие меньшим наклонам располагаются выше изоклин, соответствующих большему наклону, любой отрезок прямой $L_1(x, y, k) = 0$, лежащий в области Q_1 , и не содержащий точки $(\psi(k), y_k(\psi(k)))$, будет отрезком без контакта с траекториями системы (1) и в точках этого отрезка будет выполняться неравенство: $\frac{y}{x} > k$. Отметим, также, что любой отрезок прямой $L_1(x, y, k) = 0$, лежащий в области Q_2 , будет также отрезком без контакта с траекториями системы (1) и в точках этого отрезка будет также выполняться неравенство: $\frac{y}{x} > k$.

Рассмотрим теперь, касательную к изоклине $y_k(x)$, соответствующей положительному наклону k , проведенную в точке $(\psi(k), y_k(\psi(k)))$ касания изоклины с векторным полем.

Ее уравнение имеет вид, аналогичный уравнению (3):

$$L_2(x, y, k) = y - kx + k\psi(k) - y_k(\psi(k)) = 0. \quad (4)$$

В силу выпуклости $y_k(x)$, касательная $L_2(x, y, k)=0$ при $x \neq \psi(k)$ будет располагаться ниже изоклины $y_k(x)$. Тогда в силу того, что в области Q_2 изоклины, соответствующие меньшим наклоном располагаются ниже изоклин, соответствующих большему наклону, любой отрезок прямой $L_2(x, y, k)=0$, лежащий в области Q_2 , и не содержащий точки $(\psi(k), y_k(\psi(k)))$, будет отрезком без контакта с траекториями системы (1) и в точках этого отрезка будет выполняться неравенство: $\frac{\dot{y}}{x} < k$. Отметим, также, что любой отрезок прямой $L_2(x, y, k)=0$, лежащий в области Q_1 , будет также отрезком без контакта с траекториями системы (1) и в точках этого отрезка будет также выполняться неравенство: $\frac{\dot{y}}{x} < k$.

Далее, рассмотрим однопараметрическое семейство прямых линий $L_1(x, y, k) = 0$ с параметром k , меняющимся в пределах $-\infty < k < 0$. Если все прямые семейства касаются некоторой определенной кривой E_1 , то эта кривая называется огибающей семейства прямых. Прямые называются огибаемыми.

Поскольку $\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 = 1 + k^2 \neq 0$, то у нашего семейства прямых нет особых точек и, следовательно, огибающая E_1 существует. Пусть (x, y) – координаты точки прикосновения с огибаемой прямой, соответствующей значению параметра k .

Взяв производную по параметру k , получим: $-x + \psi(k) - \frac{\partial y_k(\psi(k))}{\partial k} = 0$

Учитывая, что $\frac{\partial y_k(\psi(k))}{\partial k} = -\frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k))$, находим, что все точки прикосновения подвижной прямой с огибающей E_1 , удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k)) \\ y = f(\psi(k)) + \frac{2\varepsilon}{k}(a - \psi(k)) \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, мы получили параметрическое уравнение огибающей E_1 .

Рассуждая абсолютно аналогично, находим параметрическое уравнение огибающей E_2 семейства касательных прямых $L_2(x, y, k)=0$, $0 < k < +\infty$:

$$\begin{cases} x = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k)) \\ y = f(\psi(k)) + \frac{2\varepsilon}{k}(a - \psi(k)) \end{cases} \quad (6)$$

Далее сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма 2. Кривые E_1 и E_2 являются кривыми без контакта с траекториями системы (1).

Доказательство. Рассмотрим кривую E_1 . Предположим, что существует значение параметра k , при котором траектория системы (1) касается кривой E_1 в точке (x_k, y_k) , где $x_k = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k))$, $y_k = f(\psi(k)) + \frac{2\varepsilon}{k}(a - \psi(k))$. Легко убедиться, что касательная к кривой E_1 в точке (x_k, y_k) есть прямая $L_1(x, y, k)=0$. Действительно, имеем: $x'_k = \left(1 - \frac{\varepsilon}{k^2}\right)\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k))$, $y'_k = k \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{k^2}\right)\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k)) \right]$ и, следовательно, $y'_x = k$. Но k есть угловой коэффициент прямой $L_1(x, y, k)=0$. Ясно, что точка (x_k, y_k) не совпадает с точкой касания изоклины $y_k(x)$ с векторным полем системы (1). Значит отрезок прямой $L_1(x, y, k)=0$, проходящий через точку (x_k, y_k) , не содержащий точки $(\psi(k), y_k(\psi(k)))$, является отрезком без контакта с траекториями системы (1). Следовательно, огибающая E_1 в некоторой окрестности точки (x_k, y_k) также является кривой без контакта с траекториями системы (1). Мы пришли к противоречию. Абсолютно аналогично, показывается, что кривая E_2 является кривой без контакта с траекториями системы (1). Лемма доказана.

Далее сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма 3. Кривая E_1 является графиком некоторой убывающей на всей числовой оси, выпуклой книзу функции $y = f_1(x)$, а кривая E_2 является графиком некоторой возрастающей на всей числовой оси, выпуклой книзу функции $y = f_2(x)$.

Доказательство. Как уже было показано выше, в точках кривой E_1 : $y'_x = k < 0$ (конечное отрицательное число), поэтому E_1 есть график некоторой убывающей на всей числовой прямой функции $y = f_1(x)$. Аналогично, так как в точках кривой E_2 : $y'_x = k > 0$ (конечное положительное число), то E_2 есть график некоторой возрастающей на всей числовой прямой функции $y = f_2(x)$. Докажем выпуклость

книзу обеих функций. Исследуем значение второй производной y_x'' в произвольной точке (x, y) кривой E_1 , которой соответствует значение параметра $k < 0$.

$$\text{Вторая производная } y_x'' = \frac{(y_x')'_k}{x'_k} = \frac{1}{(1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k))}.$$

Т. к. $(1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) = \frac{(1 - \frac{\varepsilon}{k^2})^2}{f''(\psi(k))} \geq 0$ (учитывая равенство (2)), $a - \psi(k) > 0$, $k < 0$, то $x'_k = (1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k)) > 0$, откуда следует, что $y_x'' = f_1''(x) > 0$, а значит $y = f_1(x)$ – выпуклая книзу функция.

Аналогично в произвольной точке (x, y) кривой E_2 , которой соответствует значение параметра $k > 0$, вторая производная имеет вид:

$$y_x'' = \frac{(y_x')'_k}{x'_k} = \frac{1}{(1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k))}.$$

$$\text{Т. к. } (1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) = \frac{(1 - \frac{\varepsilon}{k^2})^2}{f''(\psi(k))} \geq 0, a - \psi(k) < 0, k > 0, \text{ то}$$

$x'_k = (1 - \frac{\varepsilon}{k^2})\psi'(k) - \frac{2\varepsilon}{k^3}(a - \psi(k)) > 0$, откуда следует, что $y_x'' = f_2''(x) > 0$, а значит $y = f_2(x)$ – выпуклая книзу функция. Лемма доказана.

Далее сформулируем и докажем еще одну лемму:

Лемма 4. В точках кривой E_1 векторное поле направлено наружу (это значит, что в каждой точке (x, y) кривой E_1 наклон векторного поля $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ больше соответствующей производной $y'_x = f_1'(x)$), а в точках кривой E_2 векторное поле направлено вовнутрь (это значит, что в каждой точке (x, y) кривой E_2 наклон векторного поля $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ меньше соответствующей производной $y'_x = f_2'(x)$).

Доказательство. Т. к. обе кривые E_1 и E_2 располагаются ниже медленной кривой $\dot{x} = 0$, то наклон векторного поля меняется непрерывно при переходе от одной точки кривой (E_1 или E_2) к другой. Т. к. мы уже показали, что кривые E_1 и E_2 являются кривыми без контакта с траекториями системы(1), то достаточно взять две точки, одну на кривой E_1 , другую на кривой E_2 и посмотреть, как будет направлено векторное поле в этих точках. Если в одной из выбранных точек векторное поле будет направлено наружу (вовнутрь), то и во всех точках соответствующей кривой векторное поле будет направленно

наружу (вовнутрь). Возьмем на кривой E_1 точку, соответствующую значению параметра $k = -\sqrt{\varepsilon}$. Как нетрудно заметить, в этой точке кривая E_1 пересекает изоклину горизонтальных наклонов, вертикальную прямую $x=a$. Векторное поле в этой точке имеет нулевой наклон, а соответствующая производная $y'_x = f'_1(x) = -\sqrt{\varepsilon} < 0$, значит в нашей точке векторное поле направлено наружу, следовательно, во всех точках кривой E_1 векторное поле направлено наружу.

Возьмем на кривой E_2 точку, соответствующую значению параметра $k = \sqrt{\varepsilon}$. В этой точке кривая E_2 пересекает изоклину горизонтальных наклонов $x=a$. Векторное поле в этой точке имеет нулевой наклон, а соответствующая производная $\frac{dy}{dx} = f'_1(x) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, значит в рассматриваемой точке векторное поле направлено вовнутрь, следовательно, и во всех других точках кривой E_2 векторное поле будет направлено вовнутрь. Лемма доказана.

Т.к кривые E_1 и E_2 являются графиками всюду убывающей на числовой прямой, выпуклой книзу функции $y = f_1(x)$ и всюду возрастающей на числовой прямой выпуклой книзу функции $y = f_2(x)$ соответственно, то они пересекаются в одной точке (x_{π}, y_{π}) , которой соответствуют два значения параметра k : $k_1 < 0$, как точке, лежащей на кривой E_1 и $k_2 > 0$, как точке лежащей на кривой E_2 . Значения параметров k_1 и k_2 могут быть найдены численно с заданной точностью.

Теперь введем в рассмотрение следующую кривую E :

$$\begin{cases} x = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k)) \\ y = f(\psi(k)) + \frac{2\varepsilon}{k}(a - \psi(k)) \end{cases},$$

где параметр $k \in (-\infty, k_1] \cup [k_2, +\infty)$ (7)

Как нетрудно видеть, эта кривая при $-\infty < x \leq x_{\pi}$ совпадает с кривой E_1 , а при $x_{\pi} \leq x < +\infty$ совпадает с кривой E_2 . Именно эту кривую мы в нашей статье предлагаем в качестве приближения траекторий-уток системы (1) на участке их движения вдоль медленной кривой (здесь предполагается, что мы уже каким-либо образом «нащупали»), с некоторой степенью точности, значение параметра a , отвечающее траекториям-уткам, и именно это значение входит в параметрическое задание кривой E).

Если быть точнее, то в качестве приближения пучка траекторий-уток, движущихся вдоль медленной кривой на отрезке $[c_1, c_2]$, который содержит точку минимума x_0 медленной кривой (этот отрезок может быть сколь угодно большой длины) предлагается взять кривую $E(c_1, c_2)$:

$$\begin{cases} x = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k)) \\ y = f(\psi(k)) + \frac{2\varepsilon}{k}(a - \psi(k)) \end{cases},$$

где параметр $k \in (k_{c_1}, k_1] \cup [k_2, k_{c_2})$ (8)

Параметр k_{c_1} соответствует точке кривой $E(c_1, c_2)$ с абсциссой $x = c_1$. Он может быть найден численно с заданной точностью, как отрицательный корень уравнения $c_1 = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k))$. Параметр k_{c_2} соответствует точке кривой $E(c_1, c_2)$ с абсциссой $x = c_2$. Он может быть найден численно с заданной точностью, как положительный корень уравнения $c_2 = \psi(k) + \frac{\varepsilon}{k^2}(a - \psi(k))$.

Нетрудно заметить, что кривая $E(c_1, c_2)$, дает оценку отклонения пучка траекторий-уток, от медленной кривой. На фазовой плоскости (x, y) пучок траекторий-уток проходит выше данной кривой. Действительно, траектория-утка из пучка двигаясь на отрезке $[x_{п}, c_2]$ не может пересечь кривую $E(c_1, c_2)$, в силу того, что векторное поле в точках кривой на этом отрезке направлено вовнутрь. Она также не может пересечь кривую $E(c_1, c_2)$ двигаясь на отрезке $[c_1, x_{п}]$ (в противном случае, в силу очень быстрого изменения наклона векторного поля в окрестности кривой $E(c_1, c_2)$, она быстро уйдет влево и далее, в силу того, что векторное поле в точках кривой $E(c_1, c_2)$ на отрезке $[c_1, x_{п}]$ направлено наружу, не сможет вновь пересечь эту кривую и попасть в окрестность медленной кривой).

Далее сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 1. Кривая $E(c_1, c_2)$ приближает пучок траекторий-уток, движущихся вдоль медленной кривой на отрезке $[c_1, c_2]$, с порядком $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Из первого уравнения системы (8) можно получить следующие соотношения: $\psi(k, \varepsilon) = x(k, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x(k, \varepsilon)}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}}$, $a - \psi(k, \varepsilon) = \frac{a-x(k, \varepsilon)}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}}$ (здесь мы уже рассматриваем абсциссы точек касания изоклин с векторным полем и абсциссы точек кривой $E(c_1, c_2)$, как функции двух аргументов: k и ε). Подставив эти выражения во второе уравнение системы (8) получим следующее соотношение:

$$y(k, \varepsilon) = f\left(x(k, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x(k, \varepsilon)}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}}\right) + \frac{2\varepsilon}{k} \cdot \frac{a-x(k, \varepsilon)}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \quad (\text{здесь мы}$$

рассматриваем ординаты точек кривой $E(c_1, c_2)$, как функции двух аргументов: k и ε).

Далее введем в рассмотрение следующие функции трех аргументов: $F_1(x, k, \varepsilon) = f\left(x - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}}\right)$, $F_2(x, k, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{k} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}}$ и $F(x, k, \varepsilon) = F_1(x, k, \varepsilon) + F_2(x, k, \varepsilon)$. Используя формулу Тейлора, мы можем записать следующие соотношения:

$$F_1(x, k, \varepsilon) = F_1(x, k, 0) + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon}(x, k, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varepsilon^2}(x, k, 0) + O(\varepsilon^3)$$

$$F_2(x, k, \varepsilon) = F_2(x, k, 0) + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon}(x, k, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varepsilon^2}(x, k, 0) + O(\varepsilon^3).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon}(x, k, \varepsilon) &= f' \left(x - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{1}{k^2} \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} - \frac{\varepsilon}{k^4} \cdot \frac{a-x}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} \right) \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon}(x, k, 0) \\ &= -\frac{f'(x)(a-x)}{k^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varepsilon^2}(x, k, \varepsilon) \\ &= f'' \left(x - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{1}{k^2} \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} - \frac{\varepsilon}{k^4} \cdot \frac{a-x}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} \right)^2 + f' \left(x - \frac{\varepsilon}{k^2} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{2}{k^4} \cdot \frac{a-x}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} + \frac{2\varepsilon}{k^6 \left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^3} \right) \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varepsilon^2}(x, k, 0) &= f''(x) \cdot \left(-\frac{a-x}{k^2}\right)^2 + f'(x) \cdot \left(-\frac{2(a-x)}{k^4}\right) = \frac{f''(x)(a-x)^2}{k^4} - \\ \frac{2f'(x)(a-x)}{k^4} \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon}(x, k, \varepsilon) &= \frac{2}{k} \cdot \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} + \frac{2\varepsilon}{k^3} \cdot \frac{a-x}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon}(x, k, 0) = \\ \frac{2(a-x)}{k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varepsilon^2}(x, k, \varepsilon) &= \frac{4}{k^3} \frac{a-x}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} + \frac{4\varepsilon(a-x)}{k^5 \left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^3} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varepsilon^2}(x, k, 0) = \frac{4(a-x)}{k^3}, \\ \text{следовательно, } F(x, k, \varepsilon) &= f(x) + \varepsilon \left(-\frac{f'(x)(a-x)}{k^2} + \frac{2(a-x)}{k} \right) + \\ &\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{f''(x)(a-x)^2}{k^4} - \frac{2f'(x)(a-x)}{k^4} + \frac{4(a-x)}{k^3} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (9) \end{aligned}$$

Далее, введем в рассмотрение следующую функцию четырех аргументов:

$$G(x, y, k, \varepsilon) = f' \left(y + \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \right).$$

Используя формулу Тейлора, мы можем записать следующее соотношение:

$$G(x, y, k, \varepsilon) = G(x, y, k, 0) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(x, y, k, 0) + O(\varepsilon^2).$$

$$\text{т. к. } \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(x, y, k, \varepsilon) = f'' \left(y + \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{k^2} \frac{a-x}{1-\frac{\varepsilon}{k^2}} + \frac{\varepsilon}{k^4} \frac{(a-x)}{\left(1-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)^2} \right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(x, y, k, 0) = \frac{(a-x)f''(y)}{k^2}, \text{ то } G(x, y, k, \varepsilon) = f'(y) + \varepsilon \frac{(a-x)f''(y)}{k^2} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда для точек кривой $E(c_1, c_2)$ имеем:

$$f'(x(k, \varepsilon)) = G(x(k, \varepsilon), \psi(k, \varepsilon), k, \varepsilon) = k + \varepsilon \left(\frac{1}{k} + \frac{(a-x(k, \varepsilon))f''(\psi(k, \varepsilon))}{k^2} \right) + O(\varepsilon^2), \text{ а т. к.}$$

$f''(\psi(k, \varepsilon)) = f''(x(k, \varepsilon)) + o(1)$, то можем записать

$$f'(x(k, \varepsilon)) = G(x(k, \varepsilon), \psi(k, \varepsilon), k, \varepsilon) = k + \varepsilon \left(\frac{1}{k} + \frac{(a-x(k, \varepsilon))f''(x(k, \varepsilon))}{k^2} \right) + o(\varepsilon) \quad (10)$$

Далее, учитывая (10), имеем:

$$\frac{2(a-x(k, \varepsilon))}{k} = \frac{2(a-x(k, \varepsilon))}{f'(x(k, \varepsilon))} + \varepsilon \left(\frac{2(a-x(k, \varepsilon))}{k^2 f'(x(k, \varepsilon))} + \frac{2(a-x(k, \varepsilon))^2 f''(x(k, \varepsilon))}{k^3 f'(x(k, \varepsilon))} \right) + o(\varepsilon) \quad (11)$$

$$\frac{f'(x(k, \varepsilon))(a-x(k, \varepsilon))}{k^2} = \frac{a-x(k, \varepsilon)}{f'(x(k, \varepsilon))} + \varepsilon \left(\frac{(a-x(k, \varepsilon))}{k^3} + \frac{a-x(k, \varepsilon)}{k^2 f'(x(k, \varepsilon))} + \frac{(a-x(k, \varepsilon))^2 f''(x(k, \varepsilon))}{k^4} + \frac{(a-x(k, \varepsilon))^2 f''(x(k, \varepsilon))}{k^3 f'(x(k, \varepsilon))} \right) + o(\varepsilon) \quad (12).$$

Учитывая (9), (10), (11), (12) и, что для ординат точек кривой $E(c_1, c_2)$ имеет место равенство $y(k, \varepsilon) = F(x(k, \varepsilon), k, \varepsilon)$, упрощая и приводя подобные члены, в итоге получим для кривой $E(c_1, c_2)$ следующее асимптотическое разложение:

$$y(k, \varepsilon) = f(x(k, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{a-x(k, \varepsilon)}{f'(x(k, \varepsilon))} + \varepsilon^2 \left(\frac{f''(x(k, \varepsilon))(a-x(k, \varepsilon))^2}{(f'(x(k, \varepsilon)))^4} + \frac{2(a-x(k, \varepsilon))}{(f'(x(k, \varepsilon)))^3} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (13)$$

или если не указывать зависимость точек кривой $E(c_1, c_2)$ от параметров k и ε

$$y = f(x) + \varepsilon \frac{a-x}{f'(x)} + \varepsilon^2 \left(\frac{f''(x)(a-x)^2}{(f'(x))^4} + \frac{2(a-x)}{(f'(x))^3} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (14)$$

С другой стороны, для траекторий-уток системы (1) известны следующие результаты (см. [1]). Все значения параметра a , соответствующие траекториям-уткам, имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням ε . Аналогичное утверждение справедливо и для самих траекторий-уток: на участке движения вдоль медленной кривой они имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням ε . Далее воспользуемся результатами из статьи [1], где приводится алгоритм вычисления коэффициентов асимптотического разложения значений параметра a , соответствующих траекториям-уткам системы (1) и алгоритм вычисления коэффициентов асимптотического разложения самих траекторий-уток на участке их движения вдоль медленной кривой.

Выпишем эти асимптотические разложения, ограничившись первыми тремя членами разложения: $a = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + O(\varepsilon^3)$ (15)

$y = f(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + O(\varepsilon^3)$ (16), где $a_0 = x_0$, $f_1(x) = -\frac{x-a_0}{f'(x)}$,

$$f_2(x) = -\frac{f_1'(x)f_1(x)-f_1'(a_0)f_1(a_0)}{f'(x)}, \quad a_1 = f_1'(a_0)f_1(a_0), \quad a_2 = f_1'(a_0)f_2(a_0) + f_2'(a_0)f_1(a_0)$$

Учитывая данные равенства, мы можем записать асимптотическое разложение кривой $E(c_1, c_2)$ в следующем виде:

$$y = f(x) + \varepsilon \frac{a_0-x}{f'(x)} + \varepsilon^2 \left(\frac{a_1}{f'(x)} + \frac{f''(x)(a_0-x)^2}{(f'(x))^4} + \frac{2(a_0-x)}{(f'(x))^3} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (17)$$

Сравнивая, равенства (16) и (17), видим, что асимптотическое разложение кривой $E(c_1, c_2)$ совпадает с асимптотическим разло-

жением траекторий-уток вплоть до второго члена. Покажем, что в общем случае третьи члены не совпадают. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^2$ (она удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на функцию $f(x)$). Тогда в разложении (17) кривой $E(c_1, c_2)$ коэффициент при ε^2 будет равен $-\frac{1}{8x^2}$, а в разложении (16), соответствующем траекториям-уткам коэффициент при $\varepsilon^2 f_2(x)$ будет равен нулю. Таким образом, кривая $E(c_1, c_2)$ приближает пучок траекторий-уток, движущихся вдоль медленной кривой на отрезке $[c_1, c_2]$, с порядком $O(\varepsilon^2)$. Теорема доказана.

Список литературы:

1. Арнольд В.И. и др. Теория Бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 1. — 1986.
2. Звонкин А.К., Шубин М.А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи математических наук, — т. 39, — вып. 2. — 1984. — с. 77—122.
3. Benoit E., Callot J.-L., Diener F., Diener M. Chase au canard. — *Collecctaneu Mathematica*. — 1980, 31:3.

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

СОЛИТОН-АНТИСОЛИТОННАЯ ПАРА КАК РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИНОС-ГОРДОН

Хусаинова Галина Владимировна

*канд. физ.-мат. наук, доцент Уральской государственной
архитектурно-художественной академии,
РФ, г. Екатеринбург
E-mail: aldisa@mail.ru*

Хусаинов Дамир Зиннурович

*канд. физ.-мат. наук, доцент Уральской государственной
архитектурно-художественной академии,
РФ, г. Екатеринбург
E-mail: damiran@mail.ru*

Сагарадзе Игорь Викторович

*канд. физ.-мат. наук, доцент Уральской государственной
архитектурно-художественной академии,
РФ, г. Екатеринбург
E-mail: igorsaga@yandex.ru*

SOLITON-ANTISOLITON PAIR AS SOLUTION SINE-GORDON EQUATION

Galina Khusainova

*candidate of Science, associate professor
of the Ural State Architecture and Art Academy,
Russia, Ekaterinburg*

Damir Khusainov

*candidate of Science, associate professor
of the Ural State Architecture and Art Academy,
Russia, Ekaterinburg*

Igor Sagaradze

*candidate of Science, associate professor
of the Ural State Architecture and Art Academy,
Russia, Ekaterinburg*

АННОТАЦИЯ

Получено точное вырожденное солитонное решение для уравнения sin-Гордон как предельный (резонансный) случай двухсолитонного решения. Показано, что это решение описывает связанное состояние двух солитонов типа перегибов (солитон-антисолитонную пару).

ABSTRACT

The exact degenerate soliton solution of sine-Gordon equation is obtained as limit (resonance) case of two-soliton solution. It has shown that the solution is described the bound state of two solitons types of kinks (soliton-antisoliton pair).

Ключевые слова: солитон; перегиб; полиномиально-экспоненциальное решение.

Keywords: soliton; kink; rational-exponential solution.

Рассмотрим одно из классических уравнений математической физики — уравнение sin-Гордон (СГ):

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)u = \sin u, \quad (1)$$

(символ ∂_x обозначает частную производную относительно x).

Уравнение (1) встречается во многих областях физики: в нелинейной оптике, в физике магнетизма, в теории сверхпроводимости, как модель для описания дислокаций в кристаллах, в теории поля [3, с. 93]. Кроме того, уравнение СГ имеет многосолитонные решения [6, с. 1463], представляемые в виде стандартных конечных рядов экспонент, где каждая экспонента зависит от произвольной фазовой постоянной. Начиная с работы Хироты [5, с. 1193] и работ многих других авторов [1, с. 108], эти фазовые постоянные считались вещественными постоянными, не имели особенностей и не зависели от физических параметров солитона, таких как амплитуда и скорость.

Однако, если считать фазовые постоянные определенными сингулярными функциями параметров солитона, то возникает новый класс решений, так называемые полиномиально-экспоненциальные (ПЭ) решения [4, с. 3].

В статье [7, с. 120] было указано на существование такого типа солитонов, как возможных многополюсных решений в методе обратной задачи рассеяния. Данные решения описывают вырожденные солитоны, которые образуются в результате резонансного взаимодействия пары солитонов, характеризующиеся одинаковыми параметрами (например, амплитудой).

В данной работе мы построим новое точное решение уравнения СГ, выбрав фазовые постоянные в виде определенных сингулярных функций параметров солитона - вырожденное солитонное решение.

Рассмотрим двухсолитонное решение [6, с. 1462] уравнения (1):

$$u(x, t) = 4 \arctan \frac{g(x, t)}{f(x, t)}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \\ f(x, y) &= 1 + a(1, 2) e^{\eta_1 + \eta_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } a(1, 2) = \frac{(P_1 - P_2)^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2}{(P_1 + P_2)^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2}, \quad (4)$$

$\eta_i = P_i x - \Omega_i t + \eta_i^0$, $P_i^2 - \Omega_i^2 = 1$, и P_i, Ω_i, η_i^0 — произвольные ограниченные вещественные постоянные ($i = 1, 2$).

Заметим, что для вещественных постоянных η_i^0 ($i = 1, 2$) в пределе $P_1 \rightarrow P_2$ и $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ выражения (2), (3) сводятся к односолитонному решению. Нетривиальное решение нового типа можно

получить в пределе $P_1 \rightarrow P_2$ и $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, если рассматривать фазовые постоянные неограниченными и имеющими особенности.

Преобразуем выражение (2):

$$u = 4 \operatorname{arctg} \frac{\chi_1 e^{\xi_1} + \chi_2 e^{\xi_2}}{1 + a(1, 2) \chi_1 \chi_2 e^{\xi_1 + \xi_2}}, \quad (5)$$

где $\chi_i = e^{\eta_i}$, η_i^0 — начальная фаза, $\xi_i = P_i x - \Omega_i t$, ($i=1, 2$).

Предположим, что фазовые постоянные являются сингулярными функциями параметров солитона :

$$\chi_1 = -\chi_2 = \left(\frac{1}{-a(1, 2)} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

тогда решение (5) можно записать в виде

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(2 \chi_1 \frac{\operatorname{sh}((\eta_1 - \eta_2) / 2)}{\operatorname{ch}(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \ln 2)} \right). \quad (7)$$

С учётом формулы (4) выражение (6) можно преобразовать к следующему виду:

$$\chi_1 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2(P_1 - P_2)}, \quad (8)$$

Кроме того, можно получить дополнительное соотношение

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \frac{(P_1 - P_2)(P_1 + P_2)}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad (9)$$

поскольку $P_1^2 - \Omega_1^2 = P_2^2 - \Omega_2^2 = 1$.

Полученные выражения (8),(9) позволяют записать решение (7) в виде:

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2) \operatorname{sh} \left(\frac{(P_1 - P_2)}{2} \left\{ x - \frac{(P_1 + P_2)}{(\Omega_1 + \Omega_2)} t \right\} \right)}{(P_1 - P_2) \operatorname{ch} \left(\frac{(P_1 + P_2)}{2} x - \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2} t - \ln 2 \right)} \right). \quad (10)$$

В пределе $P_1 \rightarrow P_2, \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ из формулы (10) имеем:

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{(\Omega_1 x - P_1 t)}{\operatorname{ch}(P_1 x - \Omega_1 t - \ln 2)} \right). \quad (11)$$

При получении формулы (11) мы учли, что $\operatorname{sh} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Отметим, что предельный переход $P_1 \rightarrow P_2, \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ соответствует вырожденному случаю, так как двум солитонам соответствуют два равных параметра. Нетрудно проверить, что данная функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1).

В результате нами получено простейшее вырожденное солитонное решение уравнения СГ (ПЭ решение).

Уравнение (1) подробно исследовалось для магнитных систем. Для магнетика с анизотропной «легкой» плоскостью уравнение Ландау-Лифшица сводится к уравнению СГ [2, с. 98]. Простейшее односолитонное решение уравнения (1) [2, с. 98]:

$$\Phi_+ = \frac{u}{2} = +2 \operatorname{arctg} e^{P_1 x - \Omega_1 t + \eta^0}, \quad \Phi_- = \frac{u}{2} = -2 \operatorname{arctg} e^{P_1 x - \Omega_1 t + \eta^0} \quad (12)$$

описывает перегибы (или доменные границы), соединяющие области с $\Phi = 0$ и $\Phi_{\pm} = \pm \pi$ (см. Рис. 1). Здесь Φ -угол, отсчитываемый от легкой оси в «легкой» плоскости. Знаки \pm определяют полярность доменной границы (плюс соответствует солитону, а минус — антисолитону).

Вырожденное солитонное решение (11) описывает связанное состояние двух таких границ. Из Рисунка 2. видно, что в начальный момент времени (при $t=0$) взаимодействие носит сложный характер. Анализ дальнейшей эволюции данной пары показывает, что при больших значениях x, t доменные границы расходятся в противоположные стороны.

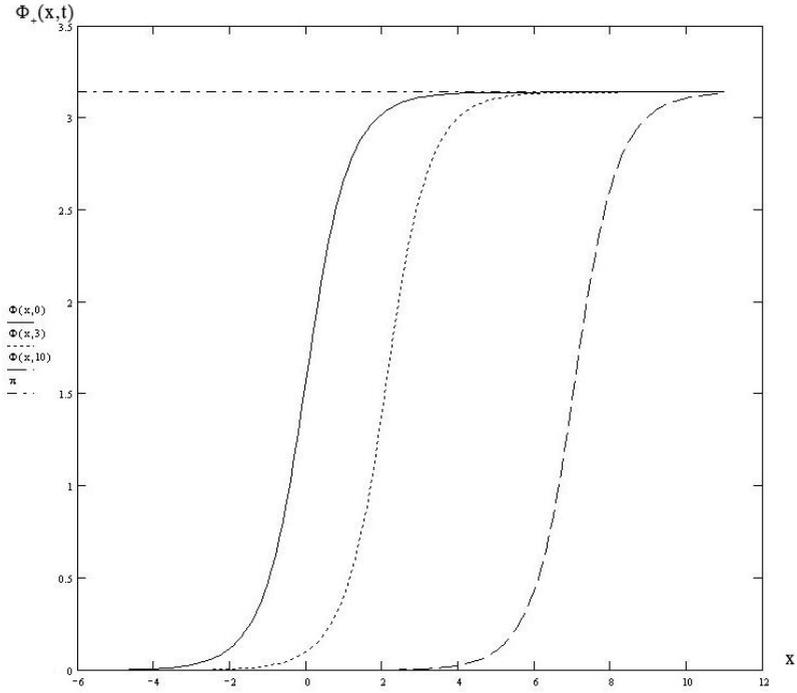


Рисунок 1.

Односолитонное решение $\Phi_+ = \frac{u}{2} = +2\text{arctg} e^{Px - \Omega t + \eta^0}$, ($P^2 = 2$, $\Omega = 1, \eta^0 = 0$).

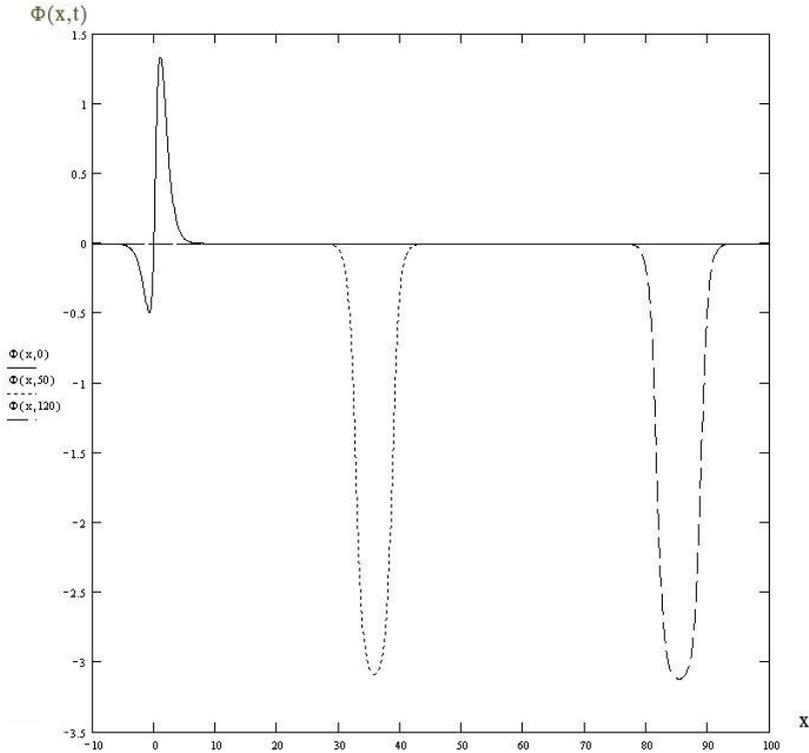


Рисунок 2.

Вырожденное солитонное решение (11), ($P^2 = 2$, $\Omega = 1$, $\eta^0 = 0$).

Список литературы:

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 1987 — 478 с.
2. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. Думка, 1983 — 192 с.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., Мир, 1989 — 326 с.
4. Bezmaternih G.V. (Khusainova G.V.), Borisov A.B. Rational — Exponential Solutions of Nonlinear Equations// Lett.Math.Physics — 1989 — Vol. 18 — P. 1—8.

5. Hirota R. Exact solution of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons// *Phys. Rev. Lett.* — 1971 — Vol. 27 — P. 1192—1194.
6. Hirota R. Exact solution of the Sin-Gordon equation for multiple collisions of solitons//*J.Phys.Soc.Jap.* — 1972 — Vol. 33, — № 5 — P. 1459—1464.
7. Poppe C. Construction of solutions of the sine – Gordon equation by means of Fredholm determinants//*Physica D* — 1983 — Vol. 9 — P. 103—139.

1.4. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ГРАФ ЗАДАЧИ ОБ ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ

Бондаренко Владимир Александрович

*д-р. физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой дискретного анализа, ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
РФ, г. Ярославль
E-mail: bond@bond.edu.yar.ru*

Николаев Андрей Валерьевич

*канд. физ.-мат. наук, доцент ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
РФ, г. Ярославль
E-mail: werdan.nik@gmail.com*

Шовгенов Джамболет Азаматович

*аспирант ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
РФ, г. Ярославль
E-mail: djsh92@mail.ru*

1-SKELETON OF THE DEGREE CONSTRAINED MINIMUM SPANNING TREE PROBLEM

Vladimir Bondarenko

*doctor of Science, Professor, Head of Discrete Analysis Department,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl*

Andrei Nikolaev

*candidate of Science, Associate Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl*

Dzhambolet Shovgenov

*graduate Student, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-00333 и гранта Президента Российской Федерации МК-5400.2015.1.

АННОТАЦИЯ

Исследуются комбинаторно-геометрические характеристики задачи о минимальном остовном дереве ограниченной степени. Устанавливается сверхполиномиальный рост кликового числа и NP-полнота проверки смежности вершин полиэдрального графа задачи.

ABSTRACT

We study combinatorial and geometric properties of the degree constrained minimum spanning tree problem. We establish a superpolynomial lower bound on the clique number and the NP-completeness of the vertex adjacency testing for the 1-skeleton of the problem polytope.

Ключевые слова: остовное дерево; полиэдральный граф; кликовое число; NP-полная задача; гамильтонова цепь.

Keywords: spanning tree; 1-skeleton of a polytope; clique number; NP-complete problem; hamiltonian chain.

Значительное число работ, связанных с вычислительной сложностью комбинаторных задач, направлено на изучение геометрических объектов, ассоциированных с задачами. Чаще всего такими объектами являются многогранники задач и графы этих многогранников. В частности, кликовое число (размер наибольшего полного подграфа) полиэдрального графа задачи служит нижней оценкой вычислительной сложности в широком классе алгоритмов, основанных на линейных сравнениях. Более того, выяснилось, что эта характеристика полиномиальна для известных полиномиально разрешимых задач и сверхполиномиальна для труднорешаемых (см., например, [2; 3]).

Рассмотрим две задачи следующего вида: задан реберно-взвешенный граф $G = (V, E)$ и некоторое множество T его подграфов, требуется найти подграф из T , имеющий минимальный суммарный вес.

Минимальное остовное дерево (minimum spanning tree, MST). Требуется найти в связном графе G остовное дерево с минимальным весом.

Задача об остовном дереве полиномиально разрешима, например, алгоритмами Прима и Краскала.

Минимальное остовное дерево ограниченной степени (degree constrained minimum spanning tree, DCST). В этой задаче требуется

найти дерево минимального веса среди всех остовных деревьев, степени вершин которых не превосходят заданную величину k .

Задача об остовном дереве ограниченной степени является NP-полной [4].

Обозначим через n — число вершин графа G , а через d — количество ребер в полном графе на n вершинах ($d = n(n-1)/2$). Рассмотрим пространство R^d , координаты точек в котором ассоциированы с ребрами графа G . Каждому элементу t из T сопоставим его характеристический вектор $x = x(t) \in R^d$, положив равными единице значения тех координат, которые соответствуют ребрам, принадлежащим t , а остальные координаты приняв равными нулю. Совокупность характеристических векторов обозначим через X . Тогда выпуклая оболочка множества X называется многогранником задачи. Полиэдральным графом задачи называется граф многогранника, множеством вершин которого служит множество геометрических вершин (в данном случае это X), а множеством ребер — совокупность геометрических ребер, то есть множество одномерных граней.

Полиэдральный граф многогранника MST_n задачи об остовном дереве для графа G на n вершинах полностью описан, точное значение кликового числа приведено в работе [1].

Утверждение 1. Кликовое число полиэдрального графа многогранника MST_n полиномиально по n и равно

$$\omega(MST_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Рассмотрим многогранник $DCST_{n,k}$ задачи о минимальном остовном дереве ограниченной степени в графе на n вершинах. Для $n > 2$ и $k > 1$ обозначим через

$$s = \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor$$

и построим дерево t специального вида. Разобьем множество вершин на s подмножеств вида $V_i = \{v_i, v_{i,1}, \dots, v_{i,k-2}\}$ по $k-1$ вершине в каждом. Все оставшиеся вершины, которых будет от 2 до $k+1$, разобьем на два подмножества $V_0 = \{v_0, v_{0,1}, \dots, v_{0,p}\}$

и $V_{s+1} = \{v_{s+1}, v_{s+1,1}, \dots, v_n\}$. Рассмотрим конструкцию следующего вида: в каждом подмножестве V_i все вершины соединяются ребрами с только с вершиной v_i (Рис. 1). Отметим, что степени вершин v_0 и v_{s+1} по построению не могут превосходить k .

Лемма 1. *Граф t_h , получаемый из дерева t отбрасыванием вершин v_0, v_{s+1} и $v_{i,j}$ вместе с ребрами $(v_{i,j}, v_i)$, является гамильтоновой цепью с концевыми вершинами v_1 и v_s .*

Доказательство. По построению степени вершин v_1 и v_s не могут быть меньше $k-1$, а степени вершин $\{v_2, \dots, v_{s-1}\}$ меньше $k-2$. Так как степени вершин в дереве t не превосходят k , то граф, получаемый после отбрасывания вершин, может быть только гамильтоновой цепью, соединяющей v_1 и v_s .

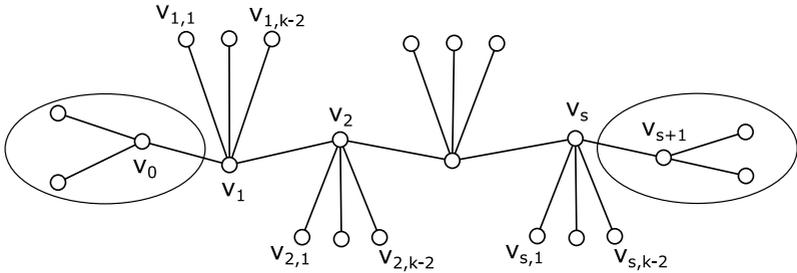


Рисунок 1. Конструкция остовного дерева ограниченной степени

Рассмотрим совокупность T_k всех остовных деревьев описанного вида. По лемме 1 каждое такое дерево содержит цепь t_h с концевыми вершинами v_1 и v_s , проходящую через вершины $\{v_2, \dots, v_{s-1}\}$. Верно и обратное: каждой цепи указанного вида соответствует дерево из T_k . Обозначим через HC_{1s} выпуклую оболочку характеристических векторов гамильтоновых цепей между вершинами v_1 и v_s .

Лемма 2. *Вершины x и y многогранника $DCST_{n,k}$, отвечающие деревьям из T_k , несмежны тогда и только тогда, когда несмежны соответствующие им вершины x_h и y_h многогранника HC_{1s} .*

Доказательство. Предположим, что вершины x_h и y_h многогранника HC_{1s} несмежны. Тогда некоторая их выпуклая комбинация совпадает с выпуклой комбинацией остальных вершин многогранника HC_{1s} .

$$\alpha x_h + \beta y_h = \sum_z \gamma_z z_h, \quad z_h \in HC_{1s},$$

$$\alpha + \beta = \sum_z \gamma_z = 1.$$

Каждой гамильтоновой цепи из HC_{1s} однозначно соответствует остовное дерево из T_k . Дополним равенство координатами, соответствующими отброшенным ребрам и получим равенство

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z, \quad z \in T_k,$$

означающее, что вершины x и y многогранника $DCST_{n,k}$ несмежны.

Пусть теперь вершины x и y смежны, тогда

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z.$$

У точек x и y все координаты, соответствующие ребрам $(v_{i,j}, v_i)$, совпадают, так как эти ребра фиксированы для остовных деревьев из T_k , а значит они совпадают и у точек z , что позволяет перейти к равенству

$$\alpha x + \beta y = \sum \gamma_z z, \quad z \in T_k.$$

Каждому остовному дереву из T_k однозначно соответствует гамильтонова цепь между вершинами v_1 и v_s из HC_{1s} . Таким образом,

$$\alpha x_h + \beta y_h = \sum \gamma_z z_h, \quad z_h \in HC_{1s},$$

и вершины x_h и y_h многогранника HC_{1s} несмежны.

Лемма 2 дает возможность воспользоваться свойствами задачи коммивояжера для изучения многогранника $DCST_{n,k}$. Для этого достаточно учесть следующий простой факт: две вершины многогранника HC_{1s} гамильтоновых цепей смежны тогда и только тогда, когда в многограннике задачи коммивояжера смежны вершины, соответствующие гамильтоновым циклам, образованным при отождествлении крайних вершин в одну. Таким образом из леммы 2 и известного результата Х. Пападимитриу [5] следует

Теорема 1. *Задача распознавания смежности вершин многогранника $DCST_{n,k}$ является NP-полной.*

Теорема 2. *Кликовое число полиэдрального графа многогранника $DCST_{n,k}$ задачи об остовном дереве ограниченной степени сверхполиномиально по s :*

$$\omega(DCST_{n,k}) \geq 2^{\left(\sqrt{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 9\right)^2}.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно воспользоваться леммой 2 и нижней оценкой кликового числа полиэдрального графа многогранника TSP_n задачи коммивояжера для n городов [1]:

$$\omega(TSP_n) \geq 2^{\left(\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor} - 9\right)/2}.$$

Таким образом, классическая задача о минимальном остовном дереве и задача о дереве ограниченной степени имеют принципиально отличные полиэдральные характеристики. Для классической задачи известны полиномиальные алгоритмы, полностью описан полиэдральный граф задачи, и установлено, что его кликовое число полиномиально по размерности пространства. При этом задача об остовном дереве ограниченной степени является труднорешаемой, полиэдральный граф задачи являются крайне сложными: даже проверка смежности вершин является NP-полной задачей, кликовое число графа сверхполиномиально по размерности пространства.

Список литературы:

1. Белов Ю.А. О плотности графа матроида // Модели исследования операций в вычислительных системах. Ярослав. гос. ун-т., Ярославль. 1985. — С. 95—100.
2. Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. — 184 с.
3. Бондаренко В.А., Николаев А.В. Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе // Доклады Академии наук. — Т. 452, — № 2. — 2013. — С. 127—129.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982. — 416 с.
5. Papadimitriou C.H. The Adjacency Relation on the Traveling Salesman Polytope is NP-Complete // Mathematical Programming. — Vol. 14, — Iss. 1. — 1978. — P. 312—324.

СЕКЦИЯ 2.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

2.1. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ UNIGRAPHICS NX ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Хусаинов Рустем Мухаметович

*канд. техн. наук, доцент Набережночелнинского института
(филиала) Казанского федерального университета,
РФ, г. Набережные Челны
E-mail: rmh@inbox.ru*

Мавзутова Гузель Рамисовна

*студент Набережночелнинского филиала Казанского национального
исследовательского технического университета
им. А.Н. Туполева-КАИ»,
РФ, г. Набережные Челны
E-mail: guzellchic@mail.ru*

APPLICATION OF THE UNIGRAPHICS NX FEATURES FOR SOLVING THE TECHNOLOGICAL PROBLEMS

Rustem Khusainov

*candidate of science, associate professor, Department of Design
and Technology software engineering industries,
the Naberezhnye Chelny institute (branch) of the Kazan federal university,
Russia, Naberezhnye Chelny*

Guzel Mavzutova

*student of Naberezhnye Chelny branch
of the Kazan national research technical university,
Russia, Naberezhnye Chelny*

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрены возможности программы Unigraphics NX облегчающие работу технолога, даются рекомендации для практического использования этих возможностей.

ABSTRACT

The article describes the features of the program Unigraphics NX, that facilitate the technology works, makes recommendations for the practical use of these opportunities.

Ключевые слова: Unigraphics NX; CAD/CAM/CAE.

Keywords: Unigraphics NX; CAD/CAM/CAE.

В рамках применения программы NX для задач подготовки производства детали можно создать:

1. 3D модель и чертеж заготовки;
2. 3D модель и чертеж зажимного приспособления;
3. управляющую программу и симуляцию обработки детали на станке в NX CAM.

Создание заготовки с применением ассоциативной связи.

Для создания ассоциативной связи между деталью и заготовкой, необходимо открыв файл детали, сохранить его под другим именем в качестве заготовки. После чего создается пустой файл сборки, куда добавляются поочередно исходная деталь, а затем заготовка. Данная сборка нужна, чтобы создать связь между деталью и заготовкой. После создания связи редактируется модель заготовку с применением средств синхронного моделирования: удаляются лишние грани, фаски и мелкие отверстия; создаются штамповочные уклоны и припуски для обработки.



Рисунок 1. Модели детали и заготовки в файле сборки

Смыслом ассоциативной связи является то, что при изменении геометрии детали нет необходимости менять ручную заготовку, так как ее геометрия будет изменяться автоматически. В итоге получаем готовую заготовку (рис. 1).

Проектирование зажимного приспособления.

Для создания прижимного приспособления был использован метод проектирования сверху вниз (в контексте сборки). Идея метода заключается в том, что детали приспособления проектируются не сами по себе, а непосредственно в файле сборки. Для данного метода необходим базовый компонент, относительно которого будут выполняться все остальные действия. При проектировании приспособления базовым компонентом будет являться заготовка.

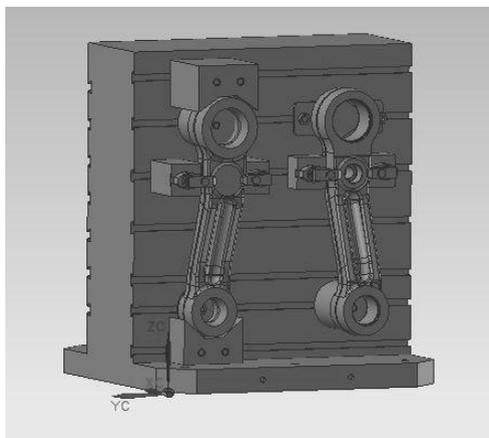


Рисунок 2. Модель приспособления

Базироваться заготовка будет по двум главным отверстиям, и зажиматься сверху прихватами, собираться детали приспособления будут на паллете. Исходя из этих условий, создаем опоры под отверстиями и прижимы. Создание опор происходит с помощью использования ассоциативной связи между заготовкой и опорами. Это необходимо для того, чтобы при изменении геометрии заготовки изменялись и сами опоры. Опоры и другие детали приспособления будут создаваться непосредственно в файле сборки, с применением связей между геометрическими элементами этих моделей. В качестве основной корпусной детали приспособления назначается паллета.

Симуляция обработки детали на станке в NX CAM.

На этом этапе выполняются следующие действия:

1. Создается новый файл в модуле *Обработка* на базе исходной детали.
2. Создается система координат детали, необходимая для расчет координат в управляющей программе.
3. В файл обработки вставляется модель заготовки и выбирается как исходный материал.
4. Задается конечная геометрия обработки, указанием на исходную деталь.
5. Создается режущий инструмент и задаются его параметры. Окно создания инструмента содержит четыре вкладки; геометрия самой фрезы задается на вкладке *Инструмент*, активной по умолчанию. Эскиз инструмента содержит параметры, обозначенные буквами, и поля ввода параметров обозначены теми же буквами — таким образом, назначение параметров очень наглядно.
6. Создается операция обработки. В группе параметров *Расположение* указываются родительские объекты для данной операции (другими словами, расположение операции в иерархии объектов обработки). Во вкладке *Геометрия* задаем деталь и заготовку. Задаются области резания — поверхности, которые необходимо получить.

После задания параметров резания генерируем траекторию обработки. Для того чтобы увидеть динамику движения инструмента и сьем металла, необходимо воспользоваться средством *Визуализация траектории инструмента*. NX позволяет загрузить модель станка, на котором будет производиться обработка. В этом случае возможно выполнить симуляцию обработки, с возможностью отслеживания реального времени обработки и контроля столкновений между узлами станка, технологической оснасткой и заготовкой.

После проведения комплексного проектирования в среде NX добились такого результата, как полная готовность к производству. В частности, с помощью модуль NX CAM легко добиваемся правильной обработки на станке с первого раза, а также создания G-кода для конкретной системы ЧПУ контроллера с помощью встроенного постпроцессора. Упрощает работу программирования наличие обширной библиотеки постпроцессоров. Кроме того имеется возможность для визуального тестирование программ ЧПУ на базе G-кода. При помощи данных методов можно добиться снижения времени программирования до 90 %.

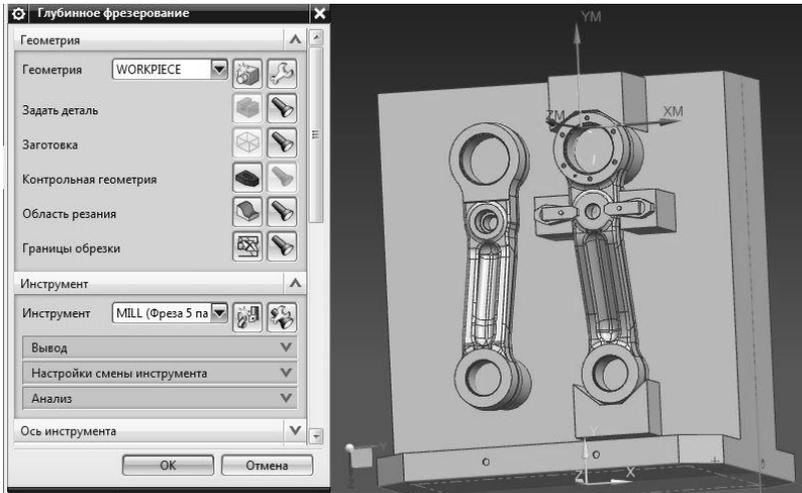


Рисунок 3. Траектория движения инструмента при фрезеровании

Производительность работы увеличивается благодаря автоматическому распознаванию типовых элементов (карманов, пазов, отверстий...); возможности создания точного процесса обработки с помощью библиотеки операций; использованию данных модели для управления процессом выбора способов обработки.

Кроме всего выше перечисленного, преимуществом работы в среде NX является и то, что изменяя геометрию исходной детали, нет необходимости вручную менять геометрию заготовки или заново начинать программирование обработки, так как применяя ассоциативные связи заготовки, геометрия заготовки подстраивается под исходную деталь, а новую траекторию инструмента можно моментально сгенерировать. Аналогично и при проектировании приспособлений наличие ассоциации между отдельными компонентами способствует автоматическому изменению геометрии деталей.

Список литературы:

1. Ведмидь П.А., Сулинов А.В. Программирование обработки в NX CAM. М.: ДМК Пресс, 2014 — 304 с.
2. Гончаров П.С. и др. NX для конструктора-машиностроителя // Коршиков С.Б., Гончаров П.С., Ельцов М.Ю., Лаптев И.В., Оснюк В.А. М.: ДМК Пресс, 2010. — 504 с.

СЕКЦИЯ 3.

ФИЗИКА

3.1. ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

МОДЕЛИ ПРЫЖКОВОГО ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА КАК ЕДИНАЯ ОСНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ПОЛЯРИЗАЦИИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Ханин Самуил Давидович

*д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физической
электроники Российского государственного педагогического
университета им. А.И. Герцена,
РФ, г. Санкт-Петербург*

Рябоконе Дарья Владимировна

*старший преподаватель кафедры физики Военной академии связи
им. Маршала Советского Союза С.М. Буденного,
РФ, г. Санкт-Петербург
E-mail: ryabokon90@gmail.com*

THE MODELS OF HOPPING TRANSPORT OF CHARGE CARRIERS AS THE UNIFORM BASIS FOR THE ANALYSIS OF THE POLARIZATION AND CONDUCTIVITY IN THE DISORDERED DIELECTRICS

Samuil Khanin

*doctor of physical and mathematical sciences, professor,
the head of the physical electronics department
of the Russian state pedagogical university named by A.I. Herzen,
Russia, St. Petersburg*

Darya Ryabokon

*senior teacher of the physics department
of Military academy of communication
named by Marshall of the Soviet Union S.M. Budenny,
Russia, St. Petersburg*

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются возможности совместного анализа поляризации и электропроводности в неупорядоченных диэлектриках на основе моделей нестационарной и нелинейной прыжковой электропроводности. Разработанные представления конкретизируются применительно к явлениям переноса в аморфных диэлектрических пленках оксида тантала.

ABSTRACT

The possibilities of the conjoint analysis of the polarization and conductivity in the disordered dielectrics on the basis of the non-stationary and nonlinear hopping conductivity models are considered. The developed representations are concretized in relation to the transfer phenomena in tantalum oxide amorphous dielectric films.

Ключевые слова: неупорядоченный диэлектрик; прыжковый транспорт; релаксационные токи; неомическая проводимость.

Keywords: disordered dielectric; hopping transport; relaxation currents; nonohmic conductivity.

В ряду явлений переноса заряда, изучаемых в неупорядоченных диэлектриках, центральное место занимают поляризация и электропроводность. Это обусловлено, по крайней мере, следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, определяющей ролью указанных явлений

в формировании функциональных свойств электронных устройств на основе неупорядоченных диэлектриков. Во-вторых, структурной чувствительностью этих явлений, что позволяет восстанавливать значимые данные об атомном и электронном строении изучаемых материалов на основе экспериментально установленных закономерностей электрических явлений.

Как правило, постановка задачи и исследования поляризации и электропроводности диэлектриков осуществляются сепаратно. Вместе с тем, для ряда диэлектрических материалов может иметь место общность элементарных актов поляризации и электропроводности, что позволяет осуществлять их анализ с единых позиций. В настоящей работе показывается, что основой для такого анализа могут служить модели нестационарной и нелинейной прыжковой электропроводности в неупорядоченных системах [2], а результатом анализа — определение значимых для прыжкового переноса микроскопических параметров.

В качестве объекта исследования в работе выступают аморфные диэлектрические пленки оксидов ниобия и тантала, полученные методом электрохимического оксидирования металлов. Как показывает эксперимент, для таких оксидов характерна длительная изотермическая релаксация тока, предшествующая установлению статической (строго говоря, квазистатической) проводимости диэлектрика (рис. 1).

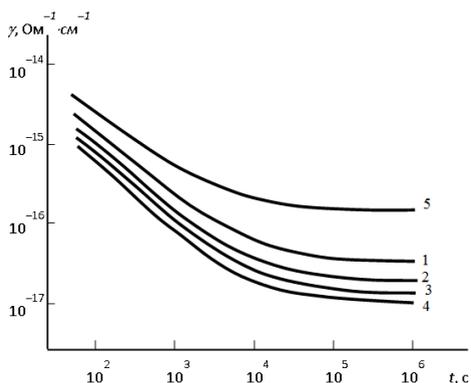


Рисунок 1. Зависимость электронной проводимости оксида тантала от длительности нагружения при напряжении электрического поля $2 \cdot 10^5$ В/см (1); $6 \cdot 10^5$ В/см (2); $9 \cdot 10^5$ В/см (3); $1,5 \cdot 10^6$ В/см (4); $3 \cdot 10^6$ В/см (5)

Наблюдаемая степенная зависимость релаксационного тока от времени может быть описана в рамках модели нестационарной прыжковой электропроводности, связывающей спад тока с увеличением размера кластера локализованных состояний, по которым происходит прыжковый транспорт, с последовательным включением в него перескоков со всё меньшей вероятностью. Установление стационарной проводимости, по которой, как правило, судят об электропроводности, происходит, согласно данной модели, при включении наиболее трудного, так называемого, критического прыжка, осуществляемого с минимальной вероятностью W_c .

Как видно из рисунка 1, росту тока с увеличением напряженности электрического поля предшествует область его падения. Это объясняется в рамках рассматриваемой модели переходом от изотропного протекания к направленному [1; 2]. Данный эффект выразителен при условии достаточно больших размеров кластера локализованных состояний, что проявляется в усилении зависимости нестационарной проводимости диэлектрика от напряженности электрического поля с увеличением длительности нагружения.

Согласно теории нестационарной прыжковой электропроводности [2], зависимость проводимости от времени и напряженности поля имеет вид:

$$\gamma(E, t) \sim \frac{\tilde{\gamma}(E)}{t \ln^2(1/\tau)},$$

где: $\tau = tW_c(E)/\alpha R_c$;

$W_c(E)$ — вероятность критического прыжка, определяющего момент возникновения проводящего кластера, замыкающего электроды (установления статической проводимости);

$\tilde{\gamma}(E)$ — величина размерности проводимости, равная по порядку величины статической проводимости материала $\tilde{\gamma}(E) \sim W_c(E)$.

Представленная на рисунке 2 (сплошная кривая) линеаризация экспериментально полученной зависимости в координатах, отвечающих приведенной формуле, обнаруживает хорошее соответствие прогнозу теории (штриховая линия).

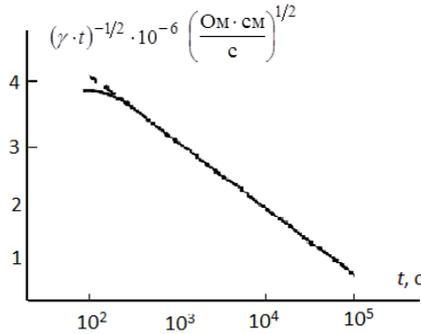


Рисунок 2. Линеаризация временной зависимости проводимости оксида тантала при напряженности электрического поля $6 \cdot 10^5$ В/см

Используя рассматриваемую модель, из экспериментальных данных, представленных на рисунке 2, может быть восстановлена вероятность критического прыжка в зависимости от напряженности поля $W_c(E)$.

Полученная зависимость хорошо соответствует наблюдаемому поведению статической проводимости металлооксида в области сильных электрических полей (рис. 3).

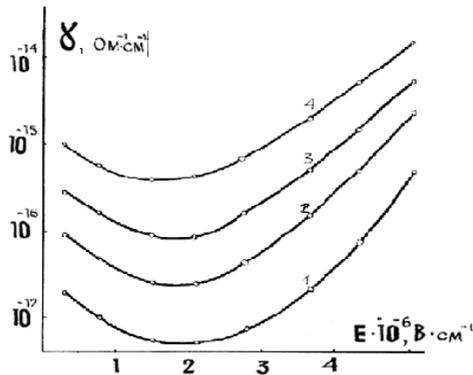


Рисунок 3. Зависимость проводимости оксида тантала от напряженности электрического поля при различных температурах ε 298 К (1), 323 К (2), 343 К (3), 363 К (4)

Представленная на рисунке 3 зависимость статической проводимости от напряженности электрического поля описывается аналитическим выражением для неомической прыжковой электропроводности: $\gamma(E, T) = \gamma(0, T) \cdot f(E/T)$, где $\gamma(0, T)$ — проводимость материала в омической области напряжений;

$$f(E/T) = \exp \left[-2\alpha R_c \xi \left(\frac{eE}{\alpha kT} \right)^{1/\nu'} + \frac{eR_c E}{3kT} \right]$$

Здесь α^{-1} — радиус локализации электронных состояний; R_c — длина прыжка; ν' — критический индекс, ξ — численный коэффициент.

Указанные выражения дают основание для восстановления из экспериментальных данных концентрации и радиуса локализации состояний, по которым осуществляется транспорт.

Еще одним подтверждением правомерности предлагаемого подхода является экспериментально установленное усиление температурной зависимости нестационарной проводимости с увеличением длительности электрического нагружения (рис. 4).

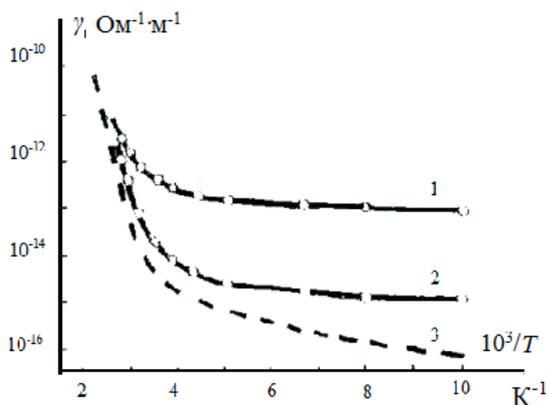


Рисунок 4. Температурная зависимость нестационарной (1,2) и статической проводимости (3) оксида тантала. Длительность электрического нагружения оксида 60 с (1); $3,6 \cdot 10^3$ с (2); более 105 с (3)

Этот факт укладывается в рамки рассматриваемой картины прыжкового транспорта носителей заряда, если допустить, что вероятность определяющего проводимость прыжка уменьшается с увеличением его энергии активации. При этом статической проводимости, определяемой вероятностью критического прыжка, должна соответствовать максимальная энергия активации.

Список литературы:

1. Ханин С.Д. Электронные свойства аморфных диэлектрических оксидов металлов. — В кн. «Физика неупорядоченных и наноструктурированных оксидов и халькогенидов металлов»: Монография / Под ред. Г.А. Бордовского. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена. — 2011. — с. 69—104.
2. Böttger H. Hopping Conduction in Solids. / H. Böttger, V. Bryksin — 1985. — VCH. — 420 p.

СЕКЦИЯ 4.

БИОЛОГИЯ

4.1. БИОХИМИЯ

БИОХИМИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ БОЛЕЗНИ ГИАЛИНОВЫХ МЕМБРАН НОВОРОЖДЕННЫХ

Королева Анна Викторовна

*студент 2 курса лечебного факультета,
Новосибирский государственный медицинский университет
Минздрава России,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: korolyowa2010@yandex.ru*

Гимаутдинова Ольга Ивановна

*д-р биол. наук, доцент Новосибирский государственный
медицинский университет Минздрава России,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: olgagmtd14@gmail.com*

BIOCHEMICAL CAUSES OF HYALINE MEMBRANE DISEASE OCCURRENCE OF THE NEWBORN

Anna Koroleva

*2-year student of General Medicine Department, Novosibirsk State
Medical University of Ministry of Health of the Russian Federation,
Russia, Novosibirsk*

Olga Gimautdinova

*doctor of Biological Sciences, Associate Professor, Novosibirsk State
Medical University of Ministry of Health of the Russian Federation,
Russia, Novosibirsk*

АННОТАЦИЯ

Дыхательная недостаточность у новорожденных — клиническое проявление болезни гиалиновых мембран. Они образуются в условиях проникновения дефектного сурфактанта в просвет альвеол при нарушении энергообмена и гипоксии. В результате альвеолы на выдохе подвергаются избыточному «спадению» из-за уменьшения поверхностного натяжения, а также снижается защитная функция неполноценного сурфактанта, что наблюдается у недоношенных младенцев. В статье рассмотрены биохимический состав и причины нарушения синтеза компонентов сурфактанта.

ABSTRACT

Respiratory failure in newborns is clinical manifestation of hyaline membrane disease. They are formed under the conditions of a defective surfactant penetration into the lumen of the alveoli in the abuse of energy and hypoxia. As a result, the alveoli are exposed to excessive exhalation "wears off" because of the reduction of surface tension, and the protective function of the defective surfactant reduces that occurs in premature babies. In the article, the biochemical composition and causes of synthesis disorder of surfactant components are considered.

Ключевые слова: респираторный дистресс синдром; гиалиновые мембраны; дипальмитоилфосфатидилхолин.

Keywords: respiratory distress syndrome; glassy membranes; dipalmitoylphosphatidylcholine.

Болезнь гиалиновых мембран (БГМ; синдром респираторного дистресса новорожденных, острый респираторный дистресс синдром) — это патологическое состояние, которое развивается у новорожденных в первые часы и дни жизни. Клинически оно проявляется дыхательной недостаточностью в результате развития первичных ателектазов, интерстициального отека легких и гиалиновых мембран. В основе патологии лежит дефицит сурфактанта, проявляющийся в условиях дисбаланса кислородного и энергетического гомеостаза. Гиалиновые мембраны образуются в результате взаимодействия проникающего в просвет альвеол плазменного фибриногена с разрушающимся сурфактантом [1, с. 1]. Это одна из серьезных проблем, с которой приходится сталкиваться врачам, выхаживающим недоношенных младенцев. Данное заболевание полиэтиологично. Причинами ОРДС могут быть:

- нарушение образования и выделения сурфактанта из-за незрелости легочной ткани ребенка;

- быстрое разрушение сурфактанта из-за тяжелой гипоксии или проникновения инфекции во время рождения;
- врожденный качественный дефект (неправильный состав или консистенция) сурфактанта.

В пренатальной диагностике используют лабораторное исследование липидного спектра околоплодных вод. Это позволяет оценить зрелость легочной ткани плода. Наиболее информативны следующие показатели:

1. коэффициент соотношения лецитина к сфингомиелину (см. рисунок). Если он менее 1, то вероятность развития ОРДС около 75 %. Вместе с тем, у новорожденных от матерей с сахарным диабетом болезнь может развиваться и при соотношении лецитина к сфингомиелину более 2,0. В норме он равен 4—5.

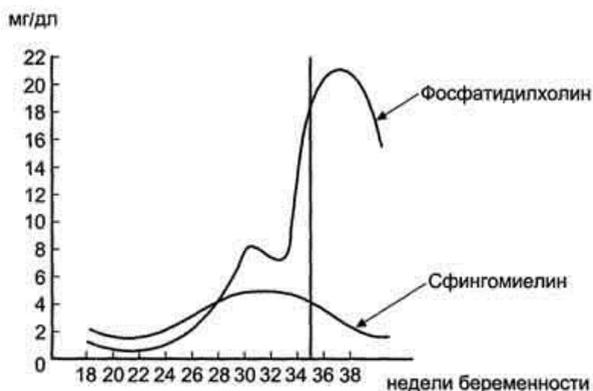


Рисунок 1. Соотношение лецитина к сфингомиелину; липидный спектр околоплодных вод в норме [2, с. 435]

2. уровень насыщенного фосфатидилхолина (в норме — более 5 мкмоль/л) или фосфатидилглицерина (в норме — более 3 мкмоль/л). Отсутствие или резкое снижение концентрации этих веществ в амниотической жидкости свидетельствует о высокой вероятности развития ОРДС [2, с. 434].

Состав сурфактанта

Сурфактант — поверхностно-активное вещество, синтезируемое альвеолоцитами II типа и безволосковыми бронхиолярными клетками; это внеклеточный липидный слой с небольшим количеством гидрофобных белков, выстилающий поверхность лёгочных альвеол и предотвращающий слипание стенок альвеол во время выдоха.

Термин «сурфактант» является аббревиатурой словосочетания surface active agents (англ.) — поверхностно-активные вещества [2, с. 435].

На сегодняшний момент известно, что сурфактант на 90 % состоит из липидов, а 10 % сухого веса сурфактанта — белки. Липиды представлены в основном фосфолипидами: дипальмитоилфосфатидилхолином (далее ДПФХ) — 45 %, фосфатидилхолином — 25 %, фосфатидилглицерином — 5 %, также в состав фосфолипидной фракции входят фосфатидилинозитол, фосфатидилэтаноламин, фосфатидилсерин (всего 5 %). Другие липиды сурфактанта — ненасыщенные жирные кислоты, холестерин, триглицериды (около 5 %). Наиболее существенную роль в уменьшении сил поверхностного натяжения играет ДПФХ [3, с. 1]. Легочный сурфактант состоит из 2-х фаз: гипофазы (нижняя, жидкая), состоящей из гликопротеидов, функция — сглаживание неровности эпителия; а также опофазы (поверхностная фаза) — мономолекулярной фосфолипидной пленки, гидрофобные участки которой обращены в просвет альвеолы.

Белки сурфактанта относятся к семейству коллектинов. Это олигомерные протеины, состоящие из доменов, «распознающих» углеводы. Они представлены двумя основными группами:

- гидрофобные SP-B, SP-C снижают поверхностное натяжение альвеол за счет стимуляции абсорбции фосфолипидов на поверхности аэрогематического барьера и способствуют равномерному распределению сурфактанта на поверхности альвеол;
- гидрофильные SP-A, SP-D участвуют в защитных механизмах организма ребенка.

Синтез основного компонента сурфактанта ДПФХ [2, с. 434].

Существуют два пути синтеза основного фосфолипидного компонента — ДПФХ (лецитин):

1. метилирование фосфатидилэтаноламина (кефалин) при помощи метилтрансферазы (источник метильной группы — S-аденозилметионин, SAM);
2. синтез из цитидиндифосфатхолина с диглицеридом в присутствии фосфохолинтрансферазы.

Первый путь синтеза сурфактанта легко истощается под влиянием гипоксии, ацидоза, гипотермии. В связи с этим считают, что полностью система сурфактанта созревает к 35—36-й неделе внутриутробного развития [4, с. 510], чему способствует второй путь синтеза. Если ребенок рождается раньше этого срока, то запасы сурфактанта обеспечивают только начало дыхания и формирования функциональной остаточной емкости легких. Из-за отставания синтеза сурфактанта от темпов его метаболизма и распада, наступает

недостаток этого вещества. В итоге это приводит к спадению альвеол на выдохе, резкому возрастанию работы дыхательных мышц, поскольку из-за неустановившейся функциональной остаточной емкости легких, повышенной их жесткости усилия, необходимые для каждого последующего раздувания легких, должны быть такими же, как и для первого дыхания.

Синтез сурфактантных протеинов стимулируют глюкокортикоиды, тиреоидные гормоны, эстрогены, адреналин и норадреналин, тормозит — инсулин [4, с. 509]. При правильном подходе к лечению ребенка и достаточных мерах, прогноз на выздоровление в большинстве случаев благоприятный, но в тяжелых запущенных случаях и при неказании своевременной помощи последствия могут быть самыми тяжелыми.

Заключение

Биохимический состав сурфактанта несомненно обеспечивает поверхностное натяжение альвеол, что убеждает в его ключевой роли в предотвращении развития болезни гиалиновых мембран. Белки и фосфолипиды сурфактанта уменьшают поверхностное натяжение слоя жидкости в миллионах альвеол и придают легочной ткани свойство высокой растяжимости, что обеспечивает дыхательный процесс ребенка без развития патологии синдрома респираторного дистресса.

Список литературы:

1. Байбарина Е.Н., Верещинский А.М., Горелик К.Д., Гребенников В.А., Дегтярев Д.Н., Иванов С.Л., Ионов О.В., Любименко В.А., Мостовой А.В., Мухаметшин Ф.Г., Панкратов Л.Г., Пруткин М.Е., Романенко К.В., Фомичев М.В., Шведов К.С.: март 2007 Intensive Care Journal.
2. Северин Е.С. Биохимия: Учеб. для вузов — ГЭОТАР-Медиа, 2003. — 779 стр.
3. Сафонов И.В. Структура и метаболизм эндогенного сурфактанта. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://nicu.rusmedserv.com/prof/klinica/rds/surfmetabolism.htm>.
4. Шабалов Н.П. Неонатология: Учебн. пособие : В 2 т. — Т. I. — 3-изд., испр. и доп. — М.: МЕДпресс-информ, 2004. — 608 с. : илл.

4.2. ПОЧВОВЕДЕНИЕ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОЧВЕННО- ЭРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Дитц Людмила Юрьевна

*канд. биол. наук, доцент НГУЭУ,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: l.ditz@mail.ru*

Катункина Евгения Владимировна

*старший преподаватель НГУЭУ,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: katunkina_eva@mail.ru*

DATA USAGE OF REMOTE PROBING WHILE INVESTIGATING SOIL EROSION PROCESSES

Lyudmila Dietz

*candidate of Biological Sciences, Associate Professor,
Novosibirsk State University of Economics and Management,
Russia, Novosibirsk*

Evgeniya Katunkina

*senior Lecturer,
Novosibirsk State University of Economics and Management,
Russia, Novosibirsk*

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены возможности изучения почвенно-эрозионных процессов с использованием данных спектрально-космических снимков. Дана характеристика проявления водной эрозии на распаханых склонах водосбора. Приведено изменение гумусового состояния почв в результате развития водной эрозии.

ABSTRACT

Possibilities of studying soil erosion processes using data of multispectral satellite images are considered. The characteristics of water erosion manifestation in cultivated slopes of the water catchment areas is given. The change of the humus state of soils as a result of water erosion development is shown.

Ключевые слова: водосборный бассейн; космические снимки; спектральная характеристика; дешифрирование; индикационные признаки; почвенно-эрозионные процессы; гумус почв.

Keywords: water catchment; satellite images; spectral characteristics; decoding; indication characteristics; soil erosion processes; humus state.

Для повышения эффективности изучения эрозионных процессов необходимо создание системы наблюдений, которая предполагает работу с большими массивами разнообразной первичной информации. Поэтому одной из актуальных задач исследований является создание единого научно-информационного пространства. В этом отношении важная роль принадлежит созданию геоинформационных систем (ГИС), которые являются универсальным средством сбора, обработки, хранения, систематизации, научного анализа и представления информации [2, с. 244].

В ходе исследований были использованы космические снимки Landsat с 30-метровым разрешением, данные радарно-топографической съемки SRTM и программное обеспечение для обработки спектрального изображения космоснимков (Erdas Imagine) и геоинформационного анализа (ArcGIS, Mapinfo).

Целью данной работы является создание цифровой модели водосборного бассейна и возможности использования спектральных космических снимков для разработки дешифровочных признаков почвенно-эрозионных процессов.

В качестве модельной территории для научно-исследовательской работы был выбран малый водосборный бассейн реки Ирмень Ордынского района Новосибирской области.

Исследуемая территория характеризуется расчлененным рельефом, который представляет собой систему грядово-увалистых возвышенностей с террасированными склонами, расчлененными ложбинами древнего стока, овражно-балочной сетью. Абсолютные отметки 120—240 м. Существенный показатель рельефа — глубоко врезанные долины мелких речек. Такие формы рельефа способствуют формированию ежегодного поверхностного стока и создают реальные условия для развития эрозионных процессов.

Площадь водосборного бассейна определяет их водность — чем больше водосборный бассейн, тем полноводнее река. Ирмень — малая река меридионального направления, относящаяся к бассейну реки Оби. Протяженность ее русла — около 41 км. Водосбор этой реки представляет собой природно-аграрную систему площадью 368 км². Наземная водосборная площадь обуславливается рельефом местности [3, с. 55].

Большая часть этой территории относится к землям сельскохозяйственного назначения: пашни, сенокосы, пастбища. Территория водораздельных пространств находится в активном сельскохозяйственном обороте под пахотными угодьями. Степень распашки территории достигает 58,9 %, естественные кормовые угодья занимают 25,2 %, древесная растительность — 16,0 %. Почвенный покров представлен черноземами выщелоченными и лугово-черноземными почвами.

На основе использования данных радарно-топографической съемки была создана пространственная картографическая модель рельефа территории малого водосборного бассейна реки Ирмень [1, с. 12] (рис. 1).

Водосборный бассейн в геоморфологическом плане представляет единое целостное образование, которое объединяет, прежде всего, однонаправленный по углу падения склонов и по тальвегам понижений в рельефе водный поток.

Показатель плотности эрозионной сети является одной из наиболее распространенных характеристик горизонтального расчленения территории. Коэффициент горизонтального расчленения рельефа варьирует в пределах (км/км²) 0,15—0,25 (60 %) и 0,30—0,40 (40 %).

Для разработки дешифровочных признаков развития почвенно-эрозионных процессов был использован метод ландшафтно-индикационного дешифрирования космических снимков.

Спектрональные космические снимки позволяют выявлять зоны потенциального возникновения эрозионных процессов в зависимости от характера рельефа, геоморфологического строения территории и направленности геохимических потоков.

В основе почвенно-эрозионного дешифрирования снимков лежит их тематическая классификация с использованием программного обеспечения Erdas Imagine по выявлению почвенных контуров (классов) различной степени деградации. Каждому пикселю изображения космоснимка соответствует набор значений спектральных признаков почвенного контура. Спектральная яркость почв в значительной степени определяется содержанием гумуса, влажностью, поверхностной структурой и степенью деградации почвенного покрова.

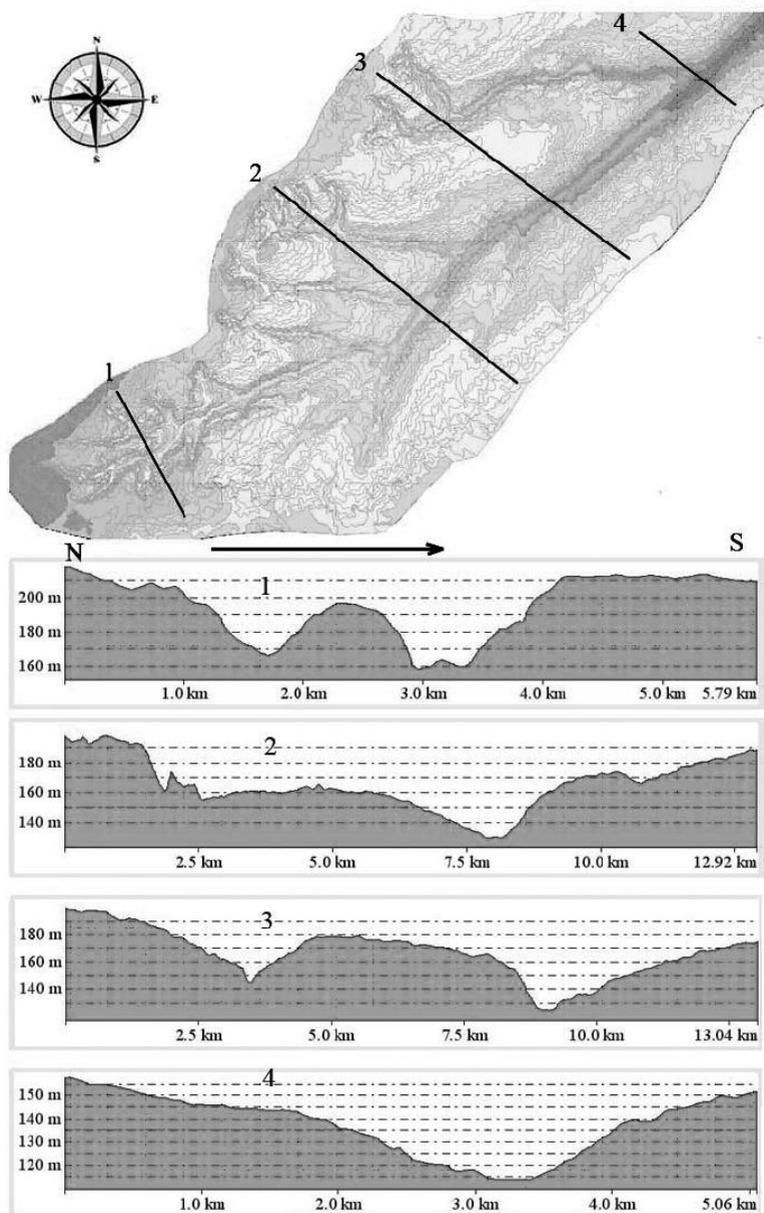


Рисунок 1. Геоморфологическое строение водосборного бассейна

В процессе исследований было установлено, что для почв занятых растительностью и свободных от неё необходим индивидуальный подбор комбинации спектральных каналов, что обусловлено различной отражательной способностью эродированных почв на открытых участках и почвах под растительностью. В результате анализа различных вариантов синтеза были подобраны следующие оптимальные для выявления эродированных почв комбинации каналов: 5-4-3 (для участков открытых почв) и 4-4-3 (для почв под посевами).

При дешифрировании изучаемые и картируемые объекты опознаются в первую очередь по тем признакам, которые непосредственно отображаются на снимках, они получили название прямых дешифровочных признаков. К ним относятся форма, размер, тон, цвет.

Надёжными косвенными признаками или индикаторами наличия смытых почв являются морфометрические особенности рельефа: преобладающие формы рельефа, общая расчленённость территории, крутизна и экспозиция склонов [3, с. 55].

Состояние растительного покрова также выступает в качестве достоверного индикатора наличия или отсутствия эрозионных процессов и интенсивности их развития. На полях с развитыми посевами на смытость почв может указывать состояние изреженности посевов.

Значительная часть пахотных угодий (23,4 %) в пределах водосборного бассейна расположена на склонах различной крутизны.

Почвы склонов, наиболее подверженных процессам эрозии, характеризуются большими величинами отражательной способности и насыщенным тоном фотоизображения, по которому отчетливо видны участки, подверженные процессам эрозии.

Особенностью проявления на космических снимках эрозионных процессов пахотных угодий является непостоянство яркостных характеристик изображения, которое возникает в результате выхода на поверхность подпахотного и иллювиального горизонтов почвы.

При слабом смыве почв смывается только часть пахотного горизонта А, оставшаяся его часть сохраняет тот же тёмный оттенок, который характерен для несмытых гумусированных горизонтов. Поэтому у слабосмытых почв не происходит изменений в окраске, и они не имеют специфического рисунка изображения на снимках. Среднесмытые почвы характеризуются значительной степенью смытости горизонта А, поэтому при их распашке местами неравномерно припахивается и горизонт В. Поверхность пашен на участках среднесмытых почв оказывается пёстрой. Сильносмытые почвы характеризуются

полностью смытым горизонтом А и затронутым смывом горизонтом В. Поэтому на снимках сильносмытые почвы имеют пестрый, нечётко пятнистый рисунок с преобладанием более светлых тонов по сравнению с рисунком изображения среднесмытых и слабосмытых почв.

Анализ спектрального изображения космических снимков водосборного бассейна показал, что на участках территорий, подверженных водной эрозии, наблюдается последовательная смена рисунка фотоизображения от вершин увала вниз по склону.

Было установлено несколько типов таких рисунков, отражающих стадии эволюции форм рельефа и структуры почвенного покрова под влиянием процессов эрозии. Покатые склоны грив характеризуются наличием ложбин стока и выделяются в виде полосчатого рисунка на снимках. На смытых почвах склонов по изменению интенсивности цвета и тона изображения можно оценить характер эродированности почв.

Подножья склонов, где откладывается грубодисперсная фракция отложений, характеризуется струйчатым рисунком эрозионных форм. Периферия межуальных понижений, где потоки паводковых и дождевых вод несколько замедляются в связи со слабым уклоном поверхности, рисунок фотоизображения принимает древовидный характер в результате блуждания водных потоков и неравномерного их распределения (рис. 2).



Рисунок 2. Изменение оптических свойств почвенного покрова под влиянием эрозионных процессов

Спектральная отражательная способность космических снимков эродированных участков подтверждается качественными характеристиками гумусного состояния почв.

Развитие эрозионных процессов приводит к снижению уровня почвенного плодородия, которое выражается в уменьшении мощности гумусового горизонта, снижении содержания и запасов гумуса в слое 0—50 см. В результате математической обработки полученных данных на территорию малого водосборного бассейна было установлено, что средние запасы гумуса в черноземах водораздельных участках (0—3°) составляет 321 т/га при содержании гумуса 6—7 %. На склоновых участках водосбора с уклоном 3—5°, где преобладают слабо- и среднесмытые почвы запасы гумуса варьируют от 202 до 307 т/га. На участках склонов крутизной 5—7°, которые наиболее подвержены плоскостной и линейной эрозии, запасы гумуса в пахотных почвах составляют 215 т/га. Нижние выположенные части склонов, где формируются гидроморфные и полугидроморфные почвы, как естественные, так и намывные с содержанием гумуса 8—10 %, его запасы составляют 380—400 т/га.

Таким образом, в основе дистанционного зондирования почвенно-эрозионных процессов и явлений лежит сильное влияние водной эрозии на оптические свойства почв. Эрозия почв приводит к снижению содержания в них темноокрашенных частичек гумуса и глинистых фракций гранулометрического состава, что, в свою очередь, приводит к увеличению яркости почвенного материала. Отсюда, почвы разной степени смытости имеют разные оптические характеристики.

Список литературы:

1. Дитц Л.Ю., Катункина Е.В. Создание цифровой модели рельефа малого водосборного бассейна // Образование и наука в современных условиях: материалы IV междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 10 июля 2015 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.]. Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2015. — С. 11—14.
2. Катункина Е.В. Рациональное природопользование в природно-ресурсных регионах / В.А. Черданцев, Б.В. Робинсон, Е.И. Малашина // Рациональное природопользование: традиции и инновации. Материалы международной научно-практической конференции, Москва, МГУ, 23—24 ноября 2012 г. / Под общ. ред. проф. М.В. Слипечука. М.: Издательство Московского университета, 2013. — С. 244—246.
3. Путилин А.Ф. Пространственная дифференциация почвенного покрова Приобья на основе цифровой модели рельефа / А.Ф. Путилин, Л.Ю. Дитц, С.Я. Кудряшова, А.М. Шкаруба, А.В. Чичулин // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2009. — Т. 4. — № 2. — С. 54—56.

4.3. ФИЗИОЛОГИЯ

УВЕЛИЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБРАБОТКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СТРУКТУРНО- ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

Артемов Станислав Игоревич

*аспирант, кафедра биотехнических систем,
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ” им. В.И. Ульянова (Ленина)»,
РФ, г. Санкт-Петербург
E-mail: thethingzero@mail.ru*

THE INCREASE IN SPATIAL RESOLUTION OF ELECTROENCEPHALOGRAPHY USING PROCESSING BASED ON THE METHOD OF STRUCTURAL-LINGUISTIC ANALYSIS OF SIGNALS

Stanislav Artemov

*post-graduate Student, Department of Biotechnical Systems,
Saint-Petersburg State Electrotechnical University “LETI”
n. a. V.I. Ulyanov (Lenin),
Russia, Saint-Petersburg*

АННОТАЦИЯ

Целью исследования является увеличение пространственного разрешения электроэнцефалографии. В основе представленного метода структурно-лингвистический подход к обработке сигналов. Выполнена проверка распределения структурного состава сигнала электроэнцефалограммы при различном разрешении метода. Полученные результаты доказывают увеличение разрешения электроэнцефалографии при использовании структурно-лингвистического анализа сигналов и не противоречат аддитивной модели электрофизиологических сигналов мозга.

ABSTRACT

The aim of the study is to increase the spatial resolution of electroencephalography. In the basis of the presented method structural-linguistic approach to signal processing. Check the distribution of the structural composition of the EEG signal at different the resolution of the method. The results demonstrate the increase in resolution electroencephalography when using the structural-linguistic analysis of signals and are consistent with an additive model electrophysiological signals of the brain.

Ключевые слова: электрофизиология; электроэнцефалография; исследование восприятия.

Keywords: electrophysiology; electroencephalography; perception survey.

Введение

Большинство современных разработок в области интерфейсов мозг-компьютер основаны на обнаружении электрофизиологических реакций мозга на предъявление стимулов. При обнаружении реакций мозга в электрофизиологическом сигнале используется метод вызванных потенциалов и электроэнцефалография (ЭЭГ) [3, с. 1], [4, с. 1], [7, с. 1], [9, с. 1], [8, с. 1].

Одним из существенных ограничений электроэнцефалографии является низкое пространственное разрешение [10, с. 1]. Проблема низкого пространственного разрешения метода анализа сигнала ЭЭГ на основе метода вызванных потенциалов обусловлена аддитивностью электрофизиологических сигналов областей мозга и «спонтанной активностью». В соответствии с известной из литературы аддитивной моделью [11, с. 83], сигнал, регистрируемый отведением электроэнцефалографа, может быть представлен взвешенной суммой сигналов областей мозга. Весовые коэффициенты определяются расстоянием областей мозга от места крепления отведения электроэнцефалографа. Различные области мозга постоянно производят сигнал, известный как «спонтанная активность». Спонтанная активность и аддитивность сигнала, регистрируемого отведением электроэнцефалографа, являются причиной присутствия в сигнале отведения электроэнцефалографа сигналов от множества областей мозга. Этим обусловлены низкая пространственная локализация и низкое пространственное разрешение методов электроэнцефалографии и вызванных потенциалов.

Цель

В настоящем исследовании предпринята попытка увеличения пространственного разрешения электроэнцефалографии использованием обработки данных электроэнцефалографии на основе метода структурно-лингвистического анализа сигналов (СЛАС).

Рабочая гипотеза

В качестве рабочей гипотезы принята возможность выделения паттернов, генерируемых областью мозга, интересующей исследователя. Эта возможность обеспечивается выделением паттернов методом структурно-лингвистического анализа сигналов [2, с. 50] с использованием инструментального средства [6, с. 1]. Так как методом СЛАС используются экстремумы сигнала, для пространственной локализации достаточно ввести нижнее ограничение на модуль амплитуды выделяемых экстремумов. Тогда, в соответствии с приведенной выше аддитивной моделью, будут выделены экстремумы, производимые областями мозга, ближайшими к отведению электроэнцефалографа.

Методика

Пример использования метода СЛАС для обнаружения восприятия стимулов и полученные результаты приведены в источнике [1, с. 48].

В качестве испытуемых служили мужчины и женщины в возрасте от 28 до 50 лет, без заболеваний на момент исследования. Испытуемым предъявлялись последовательности статичных изображений. Данные ЭЭГ испытуемого регистрировались при помощи стандартного ЭЭГ с частотой дискретизации 500 Гц и подключением отведений по системе 10—20. В одно из отведений ЭЭГ поступали метки события смены предъявляемого испытуемому стимула.

В результате эксперимента получены данные ЭЭГ 8 испытуемых.

Полученные данные ЭЭГ обработаны методом СЛАС. Обработка проводилась в скользящем окне размером 500 отсчетов и коэффициентом перекрытия 0,8. При частоте дискретизации 500 Гц такое окно достоверно включает в себя область неосознанной реакции мозга, длительность которой известна из литературы (300 мс по данным [4]).

В настоящем исследовании обработка на основе метода СЛАС включала только выделение экстремумов сигнала ЭЭГ. Из них выбирались только те, для которых модуль разности амплитуды и средней амплитуды превышал задаваемый нижний порог, умноженный на вычисляемое в каждом текущем окне стандартное отклонение. Порог позволяет выделить экстремумы, производимые областями мозга, ближайшими к отведению электроэнцефалографа.

Выделение множеств экстремумов производилось при значениях порога 1,0, 2,0 и 3,0.

Результаты

В качестве результатов обработки представлена динамика количества экстремумов при различных значениях порога. Графики для 1 испытуемого приведены на рисунках Рисунок 1, Рисунок и Рисунок .

График динамики во времени отношений количества экстремумов при значениях порога 1,0 и 2,0 для 1 испытуемого приведен на рисунке Рисунок . Для других испытуемых графики имеют аналогичный вид.



Рисунок 1. Динамика количества экстремумов при значении порога 1,0



Рисунок 2. Динамика количества экстремумов при значении порога 2,0



Рисунок 3. Динамика количества экстремумов при значении порога 3,0



Рисунок 4. Динамики отношений количества экстремумов при значениях порога 1,0 и 2,0

Среднее отношение количества экстремумов при значениях порога 1,0 и 2,0 по 495 окнам и 8 испытуемым равно 7,569.

Теоретически области мозга, производящие электрофизиологические реакции, распознаваемые как экстремумы, располагаются относительно отведения электроэнцефалографа внутри сферы с некоторым радиусом. В соответствии с аддитивной моделью сигналы областей мозга затухают под влиянием расстояния и суммируются. Поэтому радиус сферы зависит от порога обнаружения экстремума. Затухание сигнала пропорционально квадрату расстояния, радиус

сферы обратно пропорционален квадратному корню порога. Мощность множества обнаруживаемых экстремумов пропорциональна объему сферы, то есть третьей степени радиуса сферы. Радиус сферы обратно пропорционален квадратному корню порога. Тогда при значениях порога 1,0 и 2,0 отношение мощностей множеств экстремумов должно составлять 2,828.

Выводы

Полученное значение 7,569 может быть объяснено тем, что затухание сигнала пропорционально расстоянию в степени меньшей, чем 2,0, благодаря активной ретрансляции сигналов удаленных областей мозга ближайшими областями мозга. Это не противоречит известным из литературы принципам распространения сигналов в мозге [5, с. 108]. Экспериментально полученное значение степени равно 1,028.

Сравнение динамики количества экстремумов, выделяемых при использовании различных значений порога, показывает уменьшение влияния сигналов удаленных областей мозга на результат выделения экстремумов сигнала при увеличении порога. При использовании порога обработке подвергаются экстремумы сигналов, производимые областями мозга, ближайшими к отведению электроэнцефалографа. Так увеличивается пространственная локализация областей мозга, производящих сигналы, и пространственное разрешение электроэнцефалографии. При этом открываются перспективы для исследований в области разработки интерфейсов мозг-компьютер. Решение проблемы пространственного разрешения ЭЭГ обработкой методом СЛАС позволяет использовать ЭЭГ с обработкой методом СЛАС в качестве альтернативы таким сложным методам, как MRI и fMRI и PET.

Список литературы:

1. Артемов С.И. «Обнаружение восприятия стимулов на основе динамики распределения параметров структурного состава сигнала электроэнцефалограммы по отведениям, определяемой методом структурно-лингвистического анализа сигналов» / «Естественные и математические науки в современном мире» № 3 (27) Новосибирск, 2015 — с. 48—57.
2. Артемов С.И., Дюк В.А., Попова Е.А., Сенкевич Ю.И. «Поиск устойчивых паттернов в электроэнцефалограмме человека в ответ на предъявление ему коротких подпороговых визуальных стимулов» — Биотехносфера — № 1, — 2013. — стр. 50—54.

3. Ганин И.П., Шишкин С.Л., Кочетова А.Г., А.Я. Каплан "ИНТЕРФЕЙС МОЗГ КОМПЬЮТЕР "НА ВОЛНЕ P300": ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА НОМЕРА СТИМУЛОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИХ ПРЕДЪЯВЛЕНИЯ" \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: http://brain.bio.msu.ru/papers/Ganin_Shishkin_Kochetova_Kaplan_2012_FizChel_P300_VCI_Effect_of_Stimulus_Position_in_a%20Stimulus_Train.pdf (дата обращения: 25.10.2014).
4. Каплан А.Я., Кочетова А.Г., Шишкин С.Л., Басюл И.А., Ганин И.П., Васильев А.Н., Либуркина С.П.1 Экспериментально-теоретические основания и практические реализации технологии «интерфейс мозг – компьютер» // [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://brain.bio.msu.ru/papers/> (дата обращения: 22.09.2013).
5. Линдсей П. Норман Д. «Переработка информации у человека» М.: «Мир», 1974, — 555 с.
6. Сенкевич Ю.И., Юлдашев З.М., Артемов С.И. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013613966 («Программа отображения динамики показателей функционального состояния биообъекта по данным измерения электрофизиологических сигналов (версия 1.0)») М.: РОСПАТЕНТ ФГУ ФИПС, 2013. — стр. 1.
7. Ciniburk Jindřich "Suitability of Huang Hilbert Transformation for ERP detection" 1. - 3. October 2008, Izola, Slovenia \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://dsc.ijs.si/files/papers/S104%20Ciniburk.pdf> (дата обращения: 25.10.2014).
8. Gerson Adam, Parra Lucas, Sajda Paul "Single-trial analysis of EEG for Enabling Cognitive User Interfaces" \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://bme.cuny.cuny.edu/faculty/lparra/publish/NEChapter2006.pdf> (дата обращения: 31.01.2015).
9. Huang Yonghong a, Erdogmus Deniz, Hild Kenneth, Pavel Misha, Mathan Santosh "Mixed Effects Models for Single-Trial ERP Detection in Noninvasive Brain Computer Interface Design" E-Book Preprint Bentham Science Publishers October 20, 2009 \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.ohsu.edu/xd/research/centers-institutes/institute-on-development-and-disability/reknew/research/upload/Mixed-Effects-Models-for-Single-Trial-ERP-Detection.pdf> (дата обращения: 25.10.2014).
10. Karakaş H.M., Karakaş S., Özkan Ceylan A., Tali E.T."Recording event-related activity under hostile magnetic resonance environment: Is multimodal EEG/ERP-MRI recording possible?" \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://sirelkarakas.azurewebsites.net/Uploads/Documents/c849d527e2584ee5b80bb1a2af46937f.pdf> (дата обращения: 2.04.2015).
11. Saeid Sanei and J.A. Chambers "EEG SIGNAL PROCESSING" John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2007 \ [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: http://classes.engineering.wustl.edu/ese497/images/2/20/EEG_Book.pdf (дата обращения: 2.04.2015).

ТОТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ТЕЛА ЮНОШЕЙ, ЗАНИМАЮЩИХСЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ВИДАМИ СПОРТА В УСЛОВИЯХ СЕВЕРА

Семенова Анастасия Александровна

аспирант,

БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет»,

РФ, г. Сургут

E-mail: anastasia-golub@mail.ru

BODY SIZE TOTALITY OF YOUTHS GOING FOR EXTREME SPORTS IN THE NORTH

Anastasiia Semenova

postgraduate of the Surgut State University,

Russia, Surgut

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрены показатели тотальных размеров тела юношей, занимающихся экстремальными видами спорта в условиях Севера. Исследование проводилось в течение 2013—2014 годов на базе МБУ «ЦСП «Сибирский легион» и БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа-Югры «Сургутский государственный университет».

ABSTRACT

This article describes young men's total body sizes indicators going for extreme sports in the North. The research was conducted during 2013—2014 on the basis of "Sibirskiy Legion" and the "Surgut State University".

Ключевые слова: тотальные размеры тела; экстремальные виды спорта; юноши; Север.

Keywords: total body sizes; extreme sports; young men; the North.

Индивидуальное развитие человека протекает и претерпевает изменения под влиянием двух главных взаимодействующих факторов — наследственной программы и окружающей среды [3].

Значительную часть Севера Тюменской области представляет Ханты-Мансийский автономный округ-Югра, который относится к дисконформно-экстремальным территориям с умеренно суровым

климатом, с интенсивным природным и нарастающим техногенным прессингом на среду обитания и здоровье людей [5].

В округе отмечается воздействие суровых климато-географических условий на организм человека. Суровые природно-климатические факторы оказывают влияние на качество жизни и уровень здоровья человека на различных этапах онтогенеза [2].

Физическое развитие — основной показатель уровня здоровья населения. Подчиняясь биологическим закономерностям, физическое развитие зависит от большого количества факторов и отражает не только наследственную предрасположенность, но и влияние на организм климато-географических условий [1].

Основными показателями, характеризующими физическое развитие, являются тотальные размеры тела. Тотальные размеры тела — это ряд наиболее общих антропометрических параметров тела, в который включают массу тела, длину тела, обхват груди. Тотальные показатели считают наиболее существенными медико-социальными и санитарно-гигиеническими показателями. По основным морфологическим характеристикам, в определенной мере, можно судить, как о положительном, так и об отрицательном влиянии условий жизни и факторов окружающей среды на организм растущего и развивающегося человека.

В исследовании приняли участие 180 юношей от 17 до 20 лет, проживающих в г. Сургут. Из них: группа 1 — 80 юношей, занимающихся экстремальными видами спорта (спортивный туризм, паркур), группа 2 — 50 юношей, занимающихся различными циклическими видами спорта (плавание, лыжные гонки, легкая атлетика), группа 3 — 50 студентов, не занимающихся спортом, кроме обязательных занятий по физической культуре в рамках учебного процесса. Средний возраст обследованных групп составил $18,80 \pm 0,12$ лет.

Все испытуемые дали добровольное согласие на участие в исследовании, а так же являлись уроженцами Среднего Приобья, относились к I и II группам здоровья, не имели хронические заболевания, не болели за 2 недели до обследования и не имели высокий спортивный разряд.

Длина и масса тела являются важнейшими характеристиками морфофункционального статуса человека на протяжении всей его жизни. Длина тела является основным маркером наследственности и скорости ростовых процессов. Она зависит от внешне средовых и наследственных величин, от возраста, пола, состояния здоровья [3; 4].

В наших исследованиях показатели длины тела юношей, занимающихся экстремальными видами спорта, не отличались достоверно от аналогичных показателей студентов, занимающихся

различными видами спорта и не занимающихся спортом. Средний показатель длины тела у юношей первой группы составил $176,88 \pm 0,73$ см, у студентов второй группы — $177,23 \pm 1,29$ см, у юношей третьей группы — $175,45 \pm 1,13$ см. Данный показатель был в пределах от $175,5 \pm 1,13$ см до $177,2 \pm 1,29$ см.

Масса тела представляет собой интегральную оценку степени обмена веществ, энергетических и информационных процессов в организме человека. Масса тела зависит от конституциональных особенностей, питания, обменных процессов, двигательной активности, функционального состояния. Масса тела находилась в пределах от $68,85 \pm 1,80$ до $70,78 \pm 1,13$ кг, что соответствует возрастной норме. У юношей, занимающихся экстремальными видами спорта, средний показатель массы тела составил $70,78 \pm 1,13$ кг, у юношей второй группы — $68,85 \pm 1,80$ кг и у студентов, не занимающихся спортом — $69,03 \pm 1,87$ кг.

Окружность грудной клетки характеризует объем тела, развитие грудных и спинных мышц, функциональное состояние органов грудной полости. Данный показатель был в пределах от $86,88 \pm 1,44$ см до $90,24 \pm 0,52$ см. У юношей первой группы окружность грудной клетки составила $90,24 \pm 0,52$ см, у юношей второй группы — $89,43 \pm 1,17$ см и у юношей третьей группы — $86,88 \pm 1,44$ см. Окружность грудной клетки в покое достоверно больше была у юношей, занимающихся экстремальными видами спорта, по сравнению с группой юношей, не занимающихся спортом. В других группах достоверных отличий по данному показателю не наблюдали.

Таблица 1.

Тотальные размеры тела юношей г. Сургута ($M \pm m$, σ , $Cv\%$)

Группы	Показатели	Длина тела, см	Масса тела, кг	ОГК, см
Группа 1	M	176,88	70,78	90,24
	m	0,73	1,13	0,52
	σ	6,55	10,11	4,69
	$Cv\%$	3,70	14,29	5,20
Группа 2	M	177,23	68,85	89,43
	m	1,29	1,80	1,17
	σ	8,14	11,37	7,38
	$Cv\%$	4,59	16,51	8,26
Группа 3	M	175,45	69,03	86,88
	m	1,13	1,87	1,44
	σ	7,15	11,83	9,10
	$Cv\%$	4,07	17,13	10,48

Достоверные отличия показателей (p)	1-2	p>0,05	p>0,05	p>0,05
	1-3	p>0,05	p>0,05	p<0,05
	2-3	p>0,05	p>0,05	p>0,05

Кроме анализа показателей в целом по трем группам, мы сравнили показатели в группах в зависимости от возраста обследованных нами студентов. В каждой группе мы выделили две подгруппы — юноши 17—18 лет и юноши 19—20 лет. Достоверных отличий в обследуемых группах показателей тотальных размеров тела не наблюдалось.

Таким образом, значение показателей длины и массы тела на юношеском этапе онтогенеза не имели статистически достоверных отличий в зависимости от уровня физической активности. Все определяемые нами показатели находились в пределах биологической возрастной нормы.

Обследованные 1, 2, 3 групп — это юноши, которые ведут активный образ жизни: в первой группе — юноши, не первый год занимающиеся спортивным туризмом и паркурором. Вторая группа — это студенты, обучающиеся на спортивных специальностях университета, занимающиеся преимущественно циклическими видами спорта, такими как плавание, лыжные гонки, легкая атлетика, в третьей группе — юноши, ведущие здоровый, активный образ жизни, что отразилось на изучаемых нами показателях.

Список литературы:

1. Егорычева Е.В. Исследование отклонений массы тела у современной студенческой молодежи / Э.В. Егорычева, С.В. Мусина // Современные исследования социальных проблем. — 2011. — № 4. — Т. 8. — С. 1—6.
2. Еськов В.М. Влияние физических упражнений на параметры функциональных систем организма человека в условиях Севера РФ: синтетический подход / В.М. Еськов, С.И. Логинов, М.Н. Мальков, А.С. Снигирев // Теория и практика физической культуры. — 2009. — № 12. — С. 32—35.
3. Литовченко О.Г. Тотальные размеры тела уроженцев Среднего Приобья в возрасте 7—20 лет / О.Г. Литовченко, В.С. Соловьев // Экология человека. — 2007. — № 8. — С. 27—29.
4. Лукина Г.А. Изменчивость тотальных размеров тела студентов при различных типах телосложения / Г.А. Лукина, Н.А. Галактионова, Д.А. Мудрак // Бюллетень медицинских интернет-конференций. — 2013. — № 5. — Т. 3. — С. 925.
5. Хаснулин В.И. Влияние психоэмоционального стресса на адаптационно-восстановительный потенциал человека в условиях вахтового труда на Севере / В.И. Хаснулин, А.В. Хаснулина // Экология человека. — 2010. — № 12. — С. 18—22.

СЕКЦИЯ 5.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

5.1. КАРТОГРАФИЯ И ГЕОИНФОРМАТИКА

ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ МОНИТОРИНГА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Катункина Евгения Владимировна

*старший преподаватель, ФГБОУ ВО Новосибирского
государственного университета экономики и управления «НИНХ»,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: katunkina_ewa@mail.ru*

Дитц Людмила Юрьевна

*канд. биол. наук, доцент, ФГБОУ ВО Новосибирского
государственного университета экономики и управления «НИНХ»,
РФ, г. Новосибирск
E-mail: l.ditz@mail.ru*

INFORMATION RESOURCES OF UNDERGROUND WATERS MONITORING

Evgenia Katunkina

*senior teacher
of Novosibirsk State University of Economics and Management,
Russia, Novosibirsk*

Lyudmila Ditts

*candidate of Biological Sciences, assistant professor
of Novosibirsk State University of Economics and Management,
Russia, Novosibirsk*

АННОТАЦИЯ

В статье проанализированы основные источники информации о состоянии геологической среды, необходимые для разработки интегрировано-аналитической базы данных Информационной Компьютерной Системы Государственного мониторинга геологической среды РФ (ИКС ГМГС), для последующего мониторинга подземных вод.

ABSTRACT

In article the analysis of the main sources of information on a condition of the geological environment was carried out, necessary for development of integrated-analytical database of Information Computer System of the State monitoring of the geological Russian Federation environment, for the subsequent monitoring of underground waters.

Ключевые слова: государственный мониторинг; Информационная Компьютерная Система Государственного мониторинга геологической среды РФ (ИКС ГМГС); информационные ресурсы; Новосибирская область; подземные воды.

Keywords: state monitoring; Information Computer System of the State monitoring of the geological Russian Federation environment; information resources; Novosibirsk region; underground waters.

Основу информационных ресурсов государственного мониторинга состояния недр составляют результаты многолетних наблюдений за гидродинамическим (около 40 лет) и гидрохимическим (более 30 лет) состояниями подземных вод, осуществляемых по сети наблюдательных пунктов на территории Новосибирской области. Отдельные компоненты общего потока информации о состоянии геологической среды накапливались и систематизировались в различных базах данных или в архивах (фондовые материалы), отражающих результаты разномасштабных съёмочных, поисково-разведочных, тематических, научно-исследовательских работ по изучению геологических, гидрогеологических условий Новосибирской области, не связанных между собой единой системой кодов, понятий и общей структурой ведения мониторинга. Поэтому, возникла необходимость в разработке структуры интегрированной информационно-аналитической базы данных, которая позволила сосредоточить в едином банке данных информационные массивы, необходимые для оценки и прогнозирования изменений состояния геологической среды, и производить их анализ, с учетом последующего его применения для решения комплекса задач рационального управления фондом недр на основе единых подходов.

С этой целью с 2000 года началась работа по ведению и пополнению специализированной базы данных интегрированной информации о состоянии геологической среды на основе Информационной Компьютерной Системы Государственного мониторинга геологической среды РФ (ИКС ГМГС), разработанной по заказу МПР РФ совместным предприятием «Геолинк» для территориальных центров ГМГС России.

ИКС ГМГС функционально включает следующие подсистемы:

- специализированную базу данных интегрированной информации о состоянии геологической среды, созданную на основе программного пакета Monitoring 6.17;
- входящий в состав базы данных блок по лицензиям, формируемый при осуществлении деятельности по лицензированию пользования недрами, с целью последующего контроля выполнения лицензионных соглашений недропользователями;
- полнофункциональную географическую информационную систему Geolink 2.31 используемую для отображения всей имеющейся информации в картографическом виде и включающую картографическую базу данных — топографическую основу Новосибирской области масштаба 1:1 000 000.

Информационная Компьютерная Система Государственного мониторинга геологической среды РФ позволяет решать следующие задачи:

- систематизацию и обобщение информации по объектам: территории левобережья Новосибирской области в целом, отдельных административных районов НСО и крупных городов, а также локальных объектов территориального уровня; бассейнам поверхностных вод; водохозяйственным участкам; бассейнам подземных вод, конкретным месторождениям и водозаборам подземных вод;
- анализ и систематизацию данных о ресурсах, режиме и качестве подземных вод;
- ведение государственного кадастра по подземным водам;
- лицензирование пользования недрами для добычи подземных вод;
- лицензирование пользования недрами для захоронения (закачки) сточных вод в глубокие водоносные горизонты;
- планирование и проектирование геологоразведочных работ на различные типы подземных вод и гидрогеологических исследований;

- государственный геологический и водный контроль за использованием и охраной подземных водных объектов от загрязнения и истощения;
- формирование официальных документов о пользовании недрами.

Большая часть объектов, информация о которых хранится в базе данных, имеют географические координаты и могут быть отражены на карте. Для создания и ведения картографического блока банка данных используются ГИС MapInfo Professional и ArcView GIS, позволяющие трансформировать и передавать данные в другие общераспространенные ГИС, используемые организациями для информационного обеспечения различных направлений мониторинга природной среды.

Оцифровка исходной картографической информации осуществляется с использованием программы автоматической трассировки растров Easy Trace. Также имеющиеся данные могут быть представлены в виде объемных моделей различных параметров (глубин залегания водоносных горизонтов, уровней грунтовых вод и т. п.), для чего используется система построения поверхностных моделей Golden Software Surfer.

Моделирование процессов геофильтрации и массопереноса осуществляется посредством пакета программ гидрогеологического моделирования Processing Modeling for Windows. С его помощью стало возможным оперативно и полнее решать задачи формирования и движения потоков подземных вод, а также их взаимодействия с поверхностными водами, задачи миграции компонентов в подземной гидросфере. Это, в свою очередь, используется для комплексной оценки состояния геологической среды, в том числе гидрохимической и гидродинамической характеристики пресных и слабоминерализованных подземных вод западных районов Новосибирской области и прогноза его изменения в естественных условиях и под воздействием промышленного техногенеза [1].

Прогнозирование изменений гидродинамического состояния подземных вод на основе анализа хронологических рядов наблюдений за уровнем подземных вод и климатическими факторами осуществляется с помощью программного пакета VBRegim. Результаты прогнозов используются для решения проблем водопонижения и предотвращения подтопления отдельных территорий НСО.

ИКС ГМГС позволяет создавать информационно-аналитические отчеты, касающиеся гидрохимического и гидродинамического состояния подземных вод, ресурсного потенциала и эксплуатационных

запасов питьевых, технических, промышленных и минеральных лечебных вод, их добычи и использования, для анализа геоинформации и подготовки управленческих решений в сфере недропользования.

В дальнейшем, информация о состоянии геологической среды предоставляется по запросам различного рода потребителей, в том числе органов управления государственным фондом недр и других органов государственной власти на региональном и территориальном уровнях в форме гидрогеологических заключений, справок, информационных отчетов, материалов к лицензионным соглашениям, в том числе в оперативном режиме.

Ежегодно производится обновление базы данных за счет внесения как ретроспективной, так и вновь поступающей гидрогеологической информации. Поступление информации происходит в процессе комплекса работ, выполняемых в рамках различных программ, как на федеральном, так и на территориальном уровнях.

База данных на основе Информационной Компьютерной Системы Государственного Мониторинга Геологической Среды (ИКС ГМГС), имеет большую практическую значимость, т.к. позволяет оценить состояние всего фонда эксплуатационных скважин и пунктов наблюдений Новосибирской области, выветив недостатки и проблемы недропользования с целью добычи подземных вод.

Существующие базы данных фонда скважин Новосибирской области содержат информацию о 12366 скважинах, их номерах (существующих и ретрономерах), номенклатуре, дате постановки на кадастровый учет, глубинах, местоположении в геопространстве (географические координаты, привязка к субъекту, положение в рельефе), а также, данные о недропользователе, направлении использования скважины и др.

За период с 1990 по 2010 гг. на территории Новосибирской области выявлено 55 участков техногенного нарушения подземных вод, 40 из которых приурочены к первым от поверхности водоносным горизонтам, 15 — к низезалегающим эксплуатационным горизонтам. Большинство очагов приурочено к Новосибирскому промышленному району — 41 объект. Площадь их в основном не превышает 10 км².

Ситуацию осложняют брошенные, работающие на самоизлив, бесхозные скважины, через устья которых некондиционные поверхностные воды загрязняют подземные горизонты, создавая угрозу общественной безопасности и здоровью населения Новосибирской области.

В 2012 году, по данным Департамента природных ресурсов и охраны окружающей среды Новосибирской области, осуществлялся мониторинг подземных вод и опасных экзогенных геологических процессов в рамках государственного мониторинга состояния недр по 99 гидрогеологическим наблюдательным скважинам.

В ходе выполнения ВЦП «Развитие природоохранной деятельности в Новосибирской области на 2011—2013 годы» в целях предотвращения загрязнения подземных вод ликвидированы (законсервированы) 522 бесхозные водозаборные скважины. С 2009 года — даты начала работ по тампонажу — ликвидированы 979 бесхозных скважин в 15 муниципальных районах области. Наибольший объем работ выполнен в Кочковском, Куйбышевском и Чулымском районах Новосибирской области. На выполнение данных работ в 2012 году областной бюджет затратил 10 498 тыс. руб. Таким образом, сделан большой шаг в направлении обеспечения безопасного использования подземных вод [2].

Большой объем информации поступает в процессе ведения государственного учета вод по ресурсам, запасам, добыче, использованию, качеству и т. д., осуществляемых недропользователями в соответствии с условиями, установленными в лицензиях на право пользования недрами.

Учёт новых и ликвидированных объектов наблюдений сопровождается обязательной корректировкой цифровых карт и внесением новых или редактированием имеющихся паспортов объектов наблюдения в информационной базе данных.

Список литературы:

1. Дитц Л.Ю., Радионова Н.Г. Теоретические предпосылки и методы оценки водных ресурсов // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2006. — Т. 2 — № 2. — С. 168—169.
2. Катункина Е.В., Дитц Л.Ю. Развитие рынка бутилированной воды в Новосибирской области // Научный поиск в современном мире: сборник материалов 8-ой международной науч.-практ. конф., (г. Махачкала, 31 января, 2015 г.) — Махачкала: ООО «Апробация», 2015. — С. 96—104.

Научное издание

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам
XXXIII международной научно-практической конференции

№ 8 (32)
Август 2015 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 11.08.15. Формат бумаги 60x84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,125. Тираж 550 экз.

Издательство «СибАК»
630049, г. Новосибирск, Красный проспект, 165, офис 4.
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3