



ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам
XXXIV международной научно-практической конференции*

№ 9 (33)
Сентябрь 2015 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск
2015

УДК 50
ББК 20
Е 86

Ответственный редактор: Васинович М.А.

Председатель редакционной коллегии:

Козьминых Владислав Олегович — д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

Гукалова Ирина Владимировна — д-р геогр. наук, доц. ведущий научный сотрудник Института географии НАН Украины, профессор кафедры социально-экономической географии Херсонского государственного университета;

Данилов Виктор Павлович — канд. с.-х. наук, зам. дир. по научной работе СибНИИ кормов СО Россельхозакадемии;

Елисеев Дмитрий Викторович — канд. техн. наук, доцент, бизнес-консультант Академии менеджмента и рынка, ведущий консультант по стратегии и бизнес-процессам, Консалтинговая фирма «Партнеры и Боровков»;

Зеленская Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. доц. кафедры высшей математики Югорского государственного университета;

Королев Владимир Степанович — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета;

Ларионов Максим Викторович — д-р биол. наук, проф. кафедры биологии и экологии Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета, чл.-кор. Российской Академии Естествознания, г. Балашов;

Романова Алла Александровна — канд. техн. наук, доц. инженерных дисциплин Санкт-Петербургского государственного экономического университета;

Рыжкович Павел Павлович — канд. физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры физики Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, чл.-кор. Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы, член Экспертного совета по энергоэффективности зданий и сооружений Санкт-Петербурга;

Судеймен Ерлан Мэлсулы — д-р филос. наук, канд. хим. наук, директор института прикладной химии при Евразийском национальном университет им. Л.Н. Гумилева;

Харченко Виктория Евгеньевна — канд. биол. наук, ст. науч. сотр. отдела флоры Дальнего Востока, Ботанический сад-институт ДВО РАН;

Яковичина Татьяна Федоровна — канд. с.-хоз. наук, доц., заместитель заведующего кафедрой экологии и охраны окружающей среды Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, член Всеукраинской экологической Лиги.

Е 86 Естественные и математические науки в современном мире / Сб. ст. по материалам XXXIV междунар. науч.-практ. конф. № 9 (33). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2015. 88 с.

Учредитель: АНС «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

ISSN 2309-3560

© АНС «СибАК», 2015

Оглавление	
Секция 1. Математика	5
1.1. Геометрия и топология	5
ОБ ОСНАЩЕНИЯХ КАРТАНА БАЗИСНЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ СКОМПОНОВАННОГО SH-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	5
Будылкин Андрей Александрович	
ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $H(L)$ АФИННОГО ПРОСТРАНСТВА	17
Попов Юрий Иванович	
Секция 2. Физика	31
2.1. Оптика	31
СИНХРОНИЗАЦИЯ И ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ ЧИП-ЛАЗЕРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ШУМА	31
Дудецкий Вадим Юрьевич	
2.2. Физика полупроводников	44
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК CDS К CDTE	44
Гусейналиев Мамед	
2.3. Химическая физика, в том числе физика горения и взрыва	50
МЕТОДИКА ИНТЕГРАЦИИ И УЧЕТА МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ХИМИИ	50
Шевченко Светлана Сергеевна	
Шайдулина Гульнара Хайдаровна	
Нилова Людмила Ивановна	

Секция 3. Биология	56
3.1. Биологические аспекты сельского хозяйства	56
О КАЧЕСТВЕ ЭФИРНОГО МАСЛА ПОЛЫНИ ТАВРИЧЕСКОЙ (КРЫМСКОЙ) Тимашева Лидия Алексеевна Пехова Ольга Антоновна Данилова Ирина Львовна	56
3.2. Медицинская биология	67
МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ ЯИЧНИКОВ ПРИ СВИНЦОВОЙ ИНТОКСИКАЦИИ Дуденкова Наталья Анатолиевна Шубина Ольга Сергеевна Комарова Нина Анатольевна	67
Секция 4. Науки о Земле	82
4.1. Общественная география	82
ГАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ТУРИЗМ КАК ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ РОССИИ Нехаева Наталья Евгеньевна Терехова Юлия Сергеевна	82

СЕКЦИЯ 1.

МАТЕМАТИКА

1.1. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ КАРТАНА БАЗИСНЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ СКОМПОЗОВАННОГО SH-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Будылкин Андрей Александрович

аспирант,

институт прикладной математики и информационных технологий

Балтийский федеральный университет им. И. Канта,

РФ, г. Калининград

E-mail: AndreyBudylnin@rambler.ru

ABOUT CARTAN EQUIP OF BASIS SUBBUNDLES OF COMPOSITED SH-DISTRIBUTION

Andrey Budylnin

graduate student,

Baltic federal university of I.Kant, institute of applied mathematics

and information technologies

Russia, Kaliningrad

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассмотрим скомпонованные распределения (SH-распределения) проективного пространства [1]. Изучение SH-распределений актуально, так как теорию SH-распределений можно применить для исследования регулярных гиперполос в P_n и гиперполос специальных классов [6]; [7], а также для гиперполосных распределений [8]; [9]. Для Λ -, L -подрасслоений SH-распределения

построены оснащения в смысле Э. Картана [10]. Найдены условия инвариантности и неподвижности плоскостей Картана и связь оснащения Картана с нормализацией Нордена [4]. В работе использован метод Лаптева Г.Ф. [2]; [3] Индексы принимают значения

$$I, J, K, \dots = \overline{1, n}; i, j, k, s, \dots = \overline{1, m}; \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{m + 1, n - 1};$$

ABSTRACT

In this paper, we consider the distribution of assembled (SH-distribution) projective space. Theory SH-distributions can be applied to the study of regular hyperbands in Pn and hyperbands special classes, as well as for hyperband distributions. For Λ -, L-subbundles SH-distribution equipment constructed in terms of Cartan. The conditions of invariance and the stationary plane and communication equipment Cartan Cartan Norden's normalization. The paper used the method of GF Laptev , The index values Accepted

$$I, J, K, \dots = \overline{1, n}; i, j, k, s, \dots = \overline{1, m}; \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{m + 1, n - 1};$$

Ключевые слова: распределение; оснащение; условия инвариантности.

Keywords: distribution; equipment; invariance conditions.

§ 1. О голономности SH- распределения

1. В проективном пространстве P_n рассмотрим скомпонованное гиперплоскостное распределение (SH-распределение) [1]. Выберем подвижной репер $R_0 = \{A_I\}$ нулевого порядка ассоциированный с SH-распределением

$$A \equiv A_0, \{A_i\} \subset \Lambda(A_0), \{A_\alpha\} \subset L(A_0), A_n \in H_{n-1}(A_0),$$

формулы инфинитезимального перемещения которого запишем в виде

$$dA_I = \omega_I^{\bar{K}} A_{\bar{K}}, d\omega_I^{\bar{K}} = \omega_I^{\bar{J}} \wedge \omega_J^{\bar{K}}, \omega_I^{\bar{I}} = 0. \tag{1}$$

Известно [1], что SH-распределение в репере R_0 задается уравнениями (2), (3):

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K, \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega^K, \tag{2}$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{iJL}^n \omega^L, \nabla \Lambda_{i\alpha}^n + \Lambda_{i\alpha}^n \omega_0^0 = \Lambda_{i\alpha L}^n \omega^L,$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla \Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n \omega_0^0 - \Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \Lambda_{i\alpha}^n \omega_n^\alpha - \omega_i^0 = \Lambda_{inL}^n \omega^L, \\
 & \nabla \Lambda_{\alpha j}^n + \Lambda_{\alpha j}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha jL}^n \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta L}^n \omega^L, \\
 & \nabla \Lambda_{\alpha n}^n + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha j}^n \omega_n^j - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha nL}^n \omega^L, \quad (3) \\
 & \nabla \Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_n^\alpha = \Lambda_{ijL}^\alpha \omega^L, \nabla \Lambda_{i\beta}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_n^\beta - \\
 & \quad \delta_\beta^\alpha \omega_i^0 = \Lambda_{i\beta L}^\alpha \omega^L, \\
 & \nabla \Lambda_{in}^\alpha + \Lambda_{in}^\alpha \omega_0^0 - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_n^j - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_n^\beta + \Lambda_{in}^\alpha \omega_n^\alpha = \Lambda_{inL}^\alpha \omega^L, \\
 & \nabla \Lambda_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha j}^i \omega_n^i - \delta_j^i \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha jL}^i \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega_0^0 + \\
 & \quad \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega_n^i = \Lambda_{\alpha\beta L}^i \omega^L, \\
 & \nabla \Lambda_{\alpha n}^i + \Lambda_{\alpha n}^i \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega_n^\beta - \Lambda_{\alpha j}^i \omega_n^j + \Lambda_{\alpha n}^i \omega_n^i = \Lambda_{\alpha nL}^i \omega^L.
 \end{aligned}$$

Имеет место теорема существования [1]:

Теорема 1. В n -мерном проективном пространстве P_n скомпонированное SH -распределение в репере нулевого порядка R_0 определено с произволом $(2m+1)(n-m-1) + m$ функций n аргументов.

2. Тензоры $\{\Lambda_{ij}^n\}, \{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}, \{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{ij}^n\}, \{\Lambda_{\alpha\beta}^i, \Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ 1-го порядка, вообще говоря, не симметричны по индексам i, j, α, β , но именно ими охватываются симметрические тензоры $\{a_{ij}^n\}, \{a_{\alpha\beta}^n\}, \{\lambda_{ij}^\alpha, a_{ij}^n\}, \{\lambda_{\alpha\beta}^i, a_{\alpha\beta}^n\}$:

$$a_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ji}^n), \nabla a_{ij}^n + a_{ij}^n \omega_0^0 = a_{ijk}^n \omega_0^k,$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{ijk}^n &= \frac{1}{2} (\Lambda_{ijk}^n + \Lambda_{jik}^n); \\
 a_{\alpha\beta}^n &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\beta\alpha}^n), \nabla a_{\alpha\beta}^n + a_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = a_{\alpha\beta k}^n \omega_0^k, \\
 \lambda_{ij}^\alpha &= \frac{1}{2} (\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ji}^\alpha), \nabla_\delta \lambda_{ij}^\alpha + \lambda_{ij}^\alpha \pi_0^0 + a_{ij}^n \pi_n^\alpha = 0, \\
 \lambda_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{\beta\alpha}^i), \nabla_\delta \lambda_{\alpha\beta}^i + \lambda_{\alpha\beta}^i \pi_0^0 + a_{\alpha\beta}^n \pi_n^i = 0,
 \end{aligned}$$

и кососимметрические тензоры $r_{ij}^n, r_{\alpha\beta}^n, \{r_{ij}^\alpha, r_{ij}^n\}, \{r_{\alpha\beta}^i, r_{\alpha\beta}^n\}$:

$$\begin{aligned}
 r_{ij}^n &= \frac{1}{2} (\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ji}^n), \nabla r_{ij}^n + r_{ij}^n \omega_0^0 = r_{ijk}^n \omega_0^k, \\
 r_{\alpha\beta}^n &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\alpha\beta}^n - \Lambda_{\beta\alpha}^n), \nabla r_{\alpha\beta}^n + r_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = r_{\alpha\beta k}^n \omega_0^k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{ij}^\alpha &= \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ji}^\alpha), \nabla_\delta r_{ij}^\alpha + r_{ij}^\alpha \pi_0^0 + r_{ij}^n \pi_n^\alpha = 0, \\ r_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2}(\Lambda_{\alpha\beta}^i - \Lambda_{\beta\alpha}^i), \nabla_\delta r_{\alpha\beta}^i + r_{\alpha\beta}^i \pi_0^0 + r_{\alpha\beta}^n \pi_n^i = 0, \\ r_{i\alpha}^n &= \frac{1}{2}(\Lambda_{i\alpha}^n - \Lambda_{\alpha i}^n), \nabla_\delta r_{i\alpha}^n + r_{i\alpha}^n \pi_0^0 = r_{i\alpha K}^n \omega^K. \end{aligned}$$

3. Уравнение

$$\omega_0^n = 0, \tag{4}$$

Ассоциированное [2] с оснащающим распределением гиперплоскостей H , вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\{r_{\sigma\rho}^n\}$:

$$r_{\sigma\rho}^n = 0. \tag{5}$$

В этом случае (5) оснащающее H -подрасслоение определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} , огибающих элементы H -подрасслоения. При смещении центра A_0 вдоль фиксированной гиперповерхности V_{n-1} уравнения (2)-(4) задают гиперповерхность V_{n-1} , касательные плоскости H_{n-1} которой образуют поле скомпонованных плоскостей таких, что в каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ выполняется соотношение $[\Lambda(A_0), L(A_0)] = H_{n-1}(A_0)$. Условия (5) характеризуют голономность [2] H -подрасслоения. Тензор $\{r_{\sigma\rho}^n\}$ назовем тензором неголономности оснащающего H -подрасслоения.

4. Аналогично, система $\omega_0^n = 0, \omega_0^i = 0$, ассоциированная с базисным распределением плоскостей L_{n-m-1} , вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\{r_{\alpha\beta}^n, r_{\alpha\beta}^i\}$:

$$r_{\alpha\beta}^n = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{[\alpha\beta]}^n = 0, r_{\alpha\beta}^i = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{[\alpha\beta]}^i = 0. \tag{6}$$

В этом случае (6) L -подрасслоение порождает $(m+1)$ -параметрическое семейство поверхностей V_{n-m-1} , огибаемых плоскостями L_{n-m-1} (элементами L -подрасслоения).

При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_{n-m-1} уравнения (2),(3) вместе с $\omega_0^n = 0, \omega_0^i = 0$ представляют собой дифференциальные уравнения регулярной $(n-m-1)$ -мерной гиперполосы [6]; [7], оснащенной полем Λ -плоскостей. Такие гиперполосы назовем гиперполосами $H_{n-m-1}(\Lambda)$. Следовательно, обращение в нуль

тензора $\{r_{\alpha\beta}^n, r_{\alpha\beta}^i\}$ есть условие, при котором пространство P_n расслаивается на $(m+1)$ -параметрическое семейство регулярных гиперполос $H_{n-m-1}(\Lambda)$ так, что каждая плоскость $L_{n-m-1}(A_0)$ в центре A_0 является касательной плоскостью базисной поверхности V_{n-m-1} гиперполосы $H_{n-m-1}(\Lambda)$. Тензор $\{r_{\alpha\beta}^n, r_{\alpha\beta}^i\}$ назовем тензором неголономности [6]; [7] L -подрасслоения.

5. Также система $\omega_0^n = 0, \omega_0^\alpha = 0$, ассоциированная с базисным распределением плоскостей Λ_m , вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\{r_{ij}^n, r_{ij}^\alpha\}$:

$$r_{ij}^n = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{[ij]}^n = 0, r_{ij}^\alpha = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0. \quad (7)$$

В этом случае (7) базисное Λ -подрасслоение определяет $(n-m)$ -параметрическое семейство m -мерных поверхностей (плоскости Λ_m огибаются m -мерными поверхностями $(n-m)$ -параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_m уравнения (2),(3) вместе с $\omega_0^n = 0, \omega_0^\alpha = 0$ представляют собой дифференциальные уравнения регулярной m -мерной гиперполосы, оснащенной полем L -плоскостей. Такие гиперполосы назовем $H_m(L)$. Следовательно, обращение в нуль тензора $\{r_{ij}^n, r_{ij}^\alpha\}$ есть условие, при котором пространство P_n расслаивается на $(n-m)$ -параметрическое семейство регулярных гиперполос $H_m(L)$ так, что каждая плоскость $\Lambda_m(A_0)$ в центре A_0 является касательной плоскостью базисной поверхности V_m гиперполосы $H_m(L)$. Таким образом, условия (7) определяют голономность [2] Λ -подрасслоения. Тензор $\{r_{ij}^n, r_{ij}^\alpha\}$ назовем тензором неголономности Λ -подрасслоения.

Определение. Скомпонированное H -распределение назовем голономным [9], если оба базисных подрасслоения (L и Λ) голономны, т.е. выполняются условия (6), (7) и полуголономным, если выполняется только одно условие: либо (6), либо (7).

6. В общем случае плоскость $L(A)$ в каждом центре A не совпадает с характеристикой $X_{n-m-1}(A)$ [9] гиперплоскости $H(A)$, т. е.

$$X_{n-m-1}(A) \cap L_{n-m-1}(A) = \pi_{n-m-2}(A).$$

В частности, если

$$X_{n-m-1}(A) \equiv L_{n-m-1}(A),$$

то $SH(L)$ распределение есть гиперполосное распределение, которое исследовал Столяров А.В. [9] Таким образом, теорию

регулярного скомпонованного SH-распределения проективного пространства P_n можно применить как для исследования регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$ и гиперполос специальных классов, так и для гиперполосных(полосных) распределений.

§2. Инвариантное оснащение Λ -подрасслоения данного SH-распределения в смысле Э. Картана

1. В дифференциальной окрестности 1-го порядка рассмотрим квазитензоры $\{\Lambda_n^\alpha\}, \{\Lambda_n^i\}, \{\Lambda_\alpha^0\}, \{\Lambda_i^0\}$, компоненты которых удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\Lambda_n^\alpha = \frac{1}{m} \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji}, \nabla \Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{nK}^\alpha \omega^K, \quad (8)$$

$$\Lambda_n^i = \frac{1}{n-m-1} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha}, \nabla \Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega^K, \quad (9)$$

$$\Lambda_\alpha^0 = -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n \Lambda_n^i), \nabla \Lambda_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha K}^0 \omega^K, \quad (10)$$

$$\Lambda_i^0 = -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n \Lambda_n^\alpha), \nabla \Lambda_i^0 + \omega_i^0 = \Lambda_{iK}^0 \omega^K, \quad (11)$$

Уравнения (9), (8) задают нормали 1-го рода [1], а уравнения (11), (10) задают поля нормалей 2-го рода соответственно L-подраслоения и Λ -подраслоения в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

Охваты (10), (11) носят более общий характер:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\alpha^0 &= -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n v_n^i), \nabla \tilde{v}_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \tilde{v}_{\alpha K}^0 \omega^K, \\ \tilde{v}_i^0 &= -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n v_n^\alpha), \nabla \tilde{v}_i^0 + \omega_i^0 = \tilde{v}_{iK}^0 \omega^K. \end{aligned} \quad (12)$$

где квазитензоры $\{v_n^i\}, \{v_n^\alpha\}$ задают соответственно нормали 1-го рода Λ - и L-подраслоений произвольного порядка, а квазитензоры $\{\tilde{v}_i^0\}, \{\tilde{v}_\alpha^0\}$ — задают нормали 2-го рода Λ - и L-подраслоений того же порядка.

Определение. *Λ -подраслоение m - мерных линейных элементов данного SH-распределения назовем оснащенный в смысле Э. Картана [10], если каждому центру A_0 поставлена в соответствии плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$, не имеющая общих точек с текущим элементом $A_m(A_0)$ базисного Λ -подраслоения.*

Плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ в каждом центре A_0 зададим точками

$$K_\alpha(v) = v_\alpha^0 A_0 + A_\alpha, K_n(v) = v_n^0 A_0 + v_n^\alpha A_\alpha + v_n^i A_i + A_n = v_n^0 A_0 + N_n. \quad (11)$$

Функции, входящие в соотношения (11), удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla v_n^0 + v_n^i \omega_i^0 + v_n^\alpha \omega_\alpha^0 + \omega_n^0 &= v_{nK}^0 \omega^K, \\ \nabla v_n^i + \omega_n^i &= v_{nK}^i \omega^K, \\ \nabla v_n^\alpha + \omega_n^\alpha &= v_{nK}^\alpha \omega^K, \\ \nabla \tilde{v}_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 &= \tilde{v}_{\alpha K}^0 \omega^K, \end{aligned} \quad (13)$$

которые задают условие инвариантности плоскости Картана

$K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$. В дальнейшем, если специально не оговорено, в качестве функций v_n^α, v_α^0 берем соответственно охваты

$$v_n^\alpha = \Lambda_n^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^j, \tilde{v}_\alpha^0 = -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n v_n^i),$$

если $v_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_n^i$ то $\tilde{v}_\alpha^0 \equiv \Lambda_\alpha^0$. Таким образом, оснащение Λ -подрасслоения данного SH - распределения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногообразии SH полей геометрических объектов $\{v_n^i\}, \{\tilde{v}_\alpha^0\}, \{v_n^i, v_n^0, \Lambda_n^\alpha\}$. Заметим, что плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ пересекает $L_{n-m-1}(A_0)$ по плоскости

$$K_{n-m-2}(A_0) = L_{n-m-1}(A_0) \cap K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha] = [K_\alpha = A_\alpha + \tilde{v}_\alpha^0 A_0],$$

и если $\Lambda_{i\alpha}^n \equiv 0$, то плоскость $K_{n-m-2}(A_0)$ является осью плоскости Кёнигса [5]. В силу этого плоскость $K_{n-m-2}(A_0) = [K_\alpha]$ назовем осью оснащающей плоскости $K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$. Ясно, что оснащение Λ -подрасслоения в смысле Э. Картана влечет за собой оснащение Λ -подрасслоения полем нормалей 1-го рода $\{v_n^i\}$. Верно и обратное утверждение: если на Λ -подрасслоении задано поле нормалей 1-го рода $\{v_n^i\}$, то такое оснащение определяет оснащение в смысле Э. Картана Λ -подрасслоения, так как в качестве одного из возможных охватов функции v_n^0 можно взять

$$\tilde{v}_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m} (v_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n v_n^k v_n^j) - \tilde{v}_\alpha^0 \Lambda_n^\alpha \quad (14)$$

или

$$K_n^0 = -\frac{1}{m} (v_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n v_n^k v_n^j) - \lambda_\alpha^0 \Lambda_n^\alpha. \quad (15)$$

При таком охвате (14), (15) функции v_n^0 оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ — называется плоскостью Кёнигса [10] нормали $\{v_n^i\}$. Охват (15) универсален в том смысле, что он справедлив для любого поля нормалей 1-го рода $\{v_n^i\}$. Из охвата (15) функции v_n^0 следует:

Теорема 2. В каждом центре A_0 SH-распределения инвариантные оснащающие плоскости Кёнигса ($x^i - v_n^i x^n = 0, x^0 - \lambda_{\alpha}^0 x^{\alpha} - v_n^0 x^n = 0$) всех нормалей 1-го рода $N_{n-m}(v)$ Λ -подрасслоения принадлежат одной связке, $(n-m-2)$ -мерная вершина $K_{n-m-2} = [A_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^0 A_0]$ которой является осью каждой из плоскостей Кёнигса.

2. Пусть Λ -подрасслоение оснащено полями нормалей $\{v_n^i\}$ 1-го рода. Следуя работе Столярова А.В. [8], найдем условия неподвижности плоскости Э. Картана $K_{n-m-1}(A_0) = [K_{\alpha}, K_n]$. Разложив dK_{α}, dK_n по реперу $\{A_0, A_j, K_{\beta}, K_n\}$ и приравняв коэффициенты при A_0, A_j к нулю, находим

$$v_{nK}^0 - \tilde{v}_{\alpha}^0 (\Lambda_{nK}^{\alpha} + v_n^0 \delta_K^{\alpha} + v_n^j \Lambda_{jK}^{\alpha}) - (v_n^0 - \tilde{v}_{\alpha}^0 \Lambda_n^{\alpha}) (\Lambda_n^{\beta} \Lambda_{\beta K}^n + v_n^0 \delta_K^n + m j \Lambda_j K n = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{v}_{\alpha K}^0 - \tilde{v}_{\alpha}^0 \tilde{v}_{\beta}^0 \delta_K^{\beta} - (v_n^0 - \tilde{v}_{\beta}^0 \Lambda_n^{\beta}) (\Lambda_{\alpha K}^n + \tilde{v}_{\alpha}^0 \delta_K^n) = 0, \quad (17)$$

$$v_{nK}^i + v_n^0 \delta_K^i + \Lambda_n^{\alpha} \Lambda_{\alpha K}^i - v_n^i (v_n^0 \delta_K^n + v_n^j \Lambda_{jK}^n + \Lambda_n^{\beta} \Lambda_{\beta K}^n) = 0, \quad (18)$$

$$\Lambda_{\alpha K}^i + \tilde{v}_{\alpha}^0 \delta_K^i - v_n^i (\tilde{v}_{\alpha}^0 \delta_K^n + \Lambda_{\alpha K}^n) = 0. \quad (19)$$

Одновременное выполнение соотношений (18),(19) является условием того, что смещение оснащающей плоскости $K_{n-m-1}(v)$ не выходит из нормали 1-го рода $N_{n-m}(v_n^i)$. При этом оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(v)$ является плоскостью Кёнигса [3] нормали $\{v_n^i\}$, так как из соотношений (19), (18) непосредственно следует

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{\alpha}^0 = -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha j}^n v_n^j), \\ \tilde{v}_n^0 = -\frac{1}{m} (v_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n v_n^k v_n^j) - \tilde{v}_{\alpha}^0 \Lambda_n^{\alpha}. \end{array} \right.$$

В работе [9] доказано, что при $m \geq 2$ для гиперполосных распределений из соотношений (18), (19) вытекают соотношения (16), (17). Так же можно показать, что для Λ -подрасслоения данного SH-распределения условий (18), (19) достаточно, чтобы восстановить (16), (17). В случае $m \geq 2$ аналогично доказываем, что при любом смещении центра A_0 SH-распределения смещение оснащающей плоскости Э. Картана K_{n-m-1} не выходит из нормали 1-го рода $\{v_n^i\}$

тогда и только тогда, когда оснащающая плоскость K_{n-m-1} неподвижна. В этом случае плоскость K_{n-m-1} является плоскостью Кёнигса [9] нормали $\{v_n^i\}$.

§ 3. Инвариантное оснащение L-подрасслоения в смысле Каргана

1. Пусть теперь задано поле нормалей 1-го рода $\{v_n^\alpha\}$ L-подрасслоения. Тогда поле квазитензора

$$\tilde{v}_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n v_n^\alpha),$$

заданное уравнениями

$$\nabla \tilde{v}_i^0 + \omega_i^0 = \tilde{v}_{ik} \omega^k,$$

определяет поле нормалей 2-го рода L-подрасслоения.

Определение. L-подрасслоение (n-m-1)-мерных плоскостей данного SH-распределения назовем оснащённым в смысле Каргана [10], если каждому центру A_0 поставлена в соответствие плоскость $K_m(A_0)$, не имеющая общих точек с текущим элементом $L(A_0)$ базисного L-подрасслоения.

В плоскости нормали $N_{m+1}(v)$ найдем инвариантную плоскость $K_m(v)=[C_i, C_n]$, натянутую на точки:

$$C_n(v) = \eta_n^0 A_0 + \mathfrak{N}_n(v) = A_n + v_n^\alpha A_\alpha + \Lambda_n^i A_i + \eta_n^0 A_0, \quad C_i(v) = A_i + \tilde{v}_i^0 A_0,$$

или

$$\mathfrak{N}_n(v) = A_n + v_n^\alpha A_\alpha + \Lambda_n^i A_i.$$

Согласно (1), (2), (9), (12), (13) находим условия инвариантности плоскости $K_m(v)=[C_i, C_n]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \eta_n^0 + \Lambda_n^i \omega_i^0 + v_n^\alpha \omega_\alpha^0 + \omega_n^0 = \eta_{nK}^0 \omega^K, \\ \nabla \Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega^K, \\ \nabla v_n^\alpha + \omega_n^\alpha = v_{nK}^\alpha \omega^K, \\ \nabla \tilde{v}_i^0 + \omega_i^0 = \tilde{v}_{iK}^0 \omega^K, \end{array} \right. \quad (20)$$

Таким образом, оснащение L-подрасслоения данного SH-распределения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногообразии SH полей геометрических объектов $\{v_n^\alpha\}, \{\tilde{v}_i^0\}, \{v_n^\alpha, \eta_n^0, \Lambda_n^i\}$ (20). Отметим что плоскость $K_m(v)$ пересекает плоскость $\Lambda_m(A_0)$ по плоскости

$$K_{m-1}(A_0):K_{m-1}(A_0):K_m(A_0) \cap \Lambda_m(A_0) = [C_i(v)] = [A_i + \tilde{v}_i^0 A_0],$$

которую будем называть осью плоскости K_m Э. Картана. Ясно, что если $\Lambda_{i\alpha}^n = 0$, то плоскость $K_{m-1}(A_0)$ является осью плоскостей Кёнигса [3] в этом случае

$$\tilde{v}_i^0 = \Lambda_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} \Lambda_{i\alpha}^\alpha, C_i = A_i + \Lambda_i^0 A_0.$$

Оснащение L-подрасслоения в смысле Э. Картана полем плоскостей $K_m(v)$ влечет за собой оснащение L-подрасслоения полем нормалей 1-го рода $\{v_n^\alpha\}$. Верно и обратное утверждение: если на L-подрасслоении задано поле нормалей 1-го рода $\{v_n^\alpha\}$, то такое оснащение определяет оснащение в смысле Э. Картана L-подрасслоения, так как в качестве одного из возможных охватов функции η_n^0 можно взять

$$\tilde{\eta}_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} (v_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n v_n^\gamma v_n^\beta) - \tilde{v}_i^0 \Lambda_n^i \quad (21)$$

или

$$\tilde{c}_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} (v_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n v_n^\gamma v_n^\beta) - \lambda_i^0 \Lambda_n^i. \quad (22)$$

При охвате (21), (22) функции η_n^0 оснащающая плоскость $K_m(A_0)$ [9] является плоскостью Кёнигса нормали $\{v_n^\alpha\}$. Охват (22) универсален в том смысле, что он справедлив для любого поля нормалей $\{v_n^\alpha\}$ 1-го рода L-подрасслоения в данном центре A_0 .

2. Пусть L-подрасслоение оснащено полем нормалей $\{v_n^\alpha\}$ 1-го рода. Аналогично (см §2) найдем условия неподвижности плоскости Э.Картана $K_m(A_0)=[C_i, C_n]$. Разложив dC_n, dC_i по реперу $\{A_0, A_\alpha, C_i, C_n\}$ и приравняв коэффициенты при A_0 и A_α к нулю, находим

$$\eta_{nK}^0 - \tilde{v}_i^0 (\Lambda_{nK}^i + \eta_n^0 \delta_K^i + v_n^\beta \Lambda_{\beta K}^i) - (\eta_n^0 - \tilde{v}_i^0 \Lambda_n^i) (\Lambda_n^i \Lambda_{iK}^n + \eta_n^0 \delta_K^n + v_n^\beta \Lambda_{\beta K}^n) = 0, \quad (23)$$

$$\tilde{v}_{iK}^0 - \tilde{v}_i^0 \tilde{v}_j^0 \delta_K^j - (\eta_n^0 - \tilde{v}_j^0 \Lambda_n^j)(\Lambda_{iK}^n + \tilde{v}_i^0 \delta_K^n) = 0, \quad (24)$$

$$v_{nK}^\alpha + \eta_n^0 \delta_K^\alpha + \Lambda_n^\alpha \Lambda_{iK}^\alpha - v_n^\alpha (\eta_n^0 \delta_K^\alpha + v_n^\beta \Lambda_{\beta K}^n + \Lambda_n^\alpha \Lambda_{jK}^\alpha) = 0, \quad (25)$$

$$\Lambda_{iK}^\alpha + \tilde{v}_i^0 \delta_K^\alpha - v_n^\alpha (\tilde{v}_i^0 \delta_K^\alpha + \Lambda_{iK}^n) = 0. \quad (26)$$

Следуя работе [8] можно показать, что условия (23), (24) являются следствиями (25), (26), а при $n-m-1 \geq 2$ условий (25), (26) достаточно, чтобы плоскость Э. Картана $K_m(A_0)$ была неподвижной. В этом случае плоскость $K_m(A_0)$ является плоскостью Кёнигса [9] так как из (25), (26) следует, что

$$\tilde{v}_i^0 = -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n v_n^\alpha), \quad \tilde{\eta}_n^0 = -\frac{1}{n-m-1} (v_n^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n v_n^\gamma v_n^\beta) - \tilde{v}_i^0 \Lambda_n^i.$$

Для инвариантных оснащений в смысле Картана L-подрасслоения имеет место теорема аналогичная теореме 2.

Теорема 3. В каждом центре A_0 SH-распределения инвариантные оснащающие плоскости Кёнигса ($x^\alpha - v_n^\alpha x^n = 0, x^0 - \lambda_i^0 x^\alpha - \eta_n^0 x^n = 0$) всех нормалей 1-го рода $N_{m+1}(v)$ L- подрасслоения принадлежат одной связке, $(m-1)$ -мерная вершина $K_{m-1} = [A_i + \lambda_i^0 A_0]$ которой является осью каждой из плоскостей Кёнигса $K_m(A_0)$.

Резюмируя, приходим к следующим предложениям

Теорема 4. При $m \geq 2$ при любом смещении центра A_0 SH-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка оснащающая плоскость Э. Картана $K_{n-m-1} = [K_\alpha(v), K_n(v)]$ (является плоскостью Кёнигса) не выходит из нормали 1-го рода $\{v_n^i\}$ L-подрасслоения тогда и только тогда, когда она неподвижна. Условия (18), (19) — аналитический признак неподвижности плоскости Кёнигса K_{n-m-1} .

Теорема 5. При $n-m-1 \geq 2$ при любом смещении центра A_0 SH-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка оснащающая плоскость Э. Картана $K_m(v) = [C_\beta, C_n]$ (плоскость Кёнигса) не выходит из нормали 1-го рода $\{v_n^\alpha\}$ L-подрасслоения тогда и только тогда, когда она неподвижна. Условия (22), (23) — аналитический признак того, что «вращаясь» вокруг своей оси $K_{n-m-2} = [A_0 + \lambda_i^0 A_0]$, плоскость K_m остается неподвижной.

Список литературы:

1. Будылкин А.А. Инвариантные нормализации скомпонованного гиперплоскостного распределения проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире / г. Новосибирск, — 2015. — вып. № 2(26) — с. 24—33.

2. Лаптев Г.Ф. Распределение касательных элементов. Тр. Геометр. семинара. ВИНТИ, АН СССР, — 1971. — т. 3, — с. 29—48.
3. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. Труды геометрического семинара. Т. 3. — М-ВИНИТИ АН СССР, 1971, — с. 49—94.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. изд. «Наука», 1976. — 432 с.
5. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. Тр. Геометрич семинара. АН СССР, — 1973. — т. 4 — с. 71—120.
6. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос: учебное пособие / Калининград ун-т, Калининград, 1988, — 82 с.
7. Попов Ю.И. Столяров А.В. Специальные классы гиперполос проективного пространства. Учебное пособие, Калининград, БФУ им. И. Канта, — 122 с.
8. Столяров А.В. Двойственная теория оснащенных многообразий; Монография 2-е изд. / Чуваш. Ин-т, Чебоксары 1994 г. — 290 с.
9. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m -мерных линейных элементов // Проблемы геометрии// ВИНТИ АН СССР — 1975. — Т. 7. — с. 117—151.
10. Cartan E. Les espaces a connexion projective // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. М. — 1977. — вып. 4 — с. 147—159.

ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ H(L) АФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Попов Юрий Иванович

*канд. физ.-мат. наук, профессор института прикладной математики
и информационных технологий
Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
РФ, г. Калининград
E-mail: AndreyBudylnin@rambler.ru*

HYPERBAND DISTRIBUTION H(L) OF AFINNE SPACE

Yuri Popov

*candidate of science, professor of institute of applied mathematics
and information technologies Baltic federal university of I. Kant,
Russia, Kaliningrad*

АННОТАЦИЯ

Дано задание H(L)-распределения [7]; [8] в репере 0-го порядка и репере 1-го порядка. Введено соответствие Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода основных структурных подрасслоений данного H(L)-распределения. Для H-, X-, L-подрасслоений найдены их фокальные многообразия, а также поля нормализаций и пучки нормалей 1-го и 2-го рода Нордена в дифференциальной окрестности 1-го порядка. Изучение H(L)-распределений актуально, так как теорию H(L)-распределений можно применить для изучения торсовых поверхностей, регулярных одномерных гиперполос, а также специальных классов гиперполос и гиперповерхностей аффинного пространства. Работа выполнена методом Лаптева Г.Ф. [3]. В работе индексы принимают значения:

$$I, J, K, \dots = \overline{1, n}; \quad i, j, k, s, \dots = \overline{1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{2, n-1}.$$

ABSTRACT

Given the task of H(L)-distribution in the frame of zero order and datum of the 1st order. Permission ratio Bompiani - Pantazi between the normals of the 1st and 2nd kind of major structural subbundles of H(L)-Distribution (H-, X-, L- subbundles). For H-, X-, L-subbundles found their focal manifolds, as well as the field of normalization and the normal

bundles of 1st and 2nd kind Nord differential neighborhood of the 1st order. Study of H (L)-distributions of actual, as the theory of H (L)-distributions can be used to study torsovyh surfaces, dimensional hyperbands regular and special classes hyperbands and hypersurfaces of affine space. This work by GF Laptev. In all the indices take the values:

$$I, J, K, \dots = \overline{1, n}; i, j, k, s, \dots = \overline{1, n-1}; \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{2, n-1}.$$

Ключевые слова: гиперполосное распределение; аффинное пространство; фокальный образ.

Keywords: hyperband distribution; affine space; focal image.

§ 1. Задание гиперполосного H(L)-распределения аффинного пространства

1. Пусть дано n-мерное аффинное пространство A_n , отнесенное к подвижному реперу $\{A, \vec{e}_i\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеет вид

$$d\vec{A} = \omega^K \vec{e}_K, d\vec{e}_K = \omega_K^L \vec{e}_L. \quad (*)$$

Инвариантные формы ω^K и ω_K^L аффинной группы преобразований удовлетворяют структурными уравнениями аффинного пространства A_n :

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, d\omega_K^L = \omega_K^J \wedge \omega_J^L.$$

Рассмотрим H(L)-распределение аффинного пространства A_n . При этом распределение прямых L(A) назовем базисным распределением (или L-подрасслоением), а распределение гиперплоскостей H(A)-оснащающим распределением (или H-подраслоением). В реперу R^0 ($\{\vec{e}_\alpha\} \subset H(A); \vec{e}_1 || L$) H(L)-распределение задается уравнениями:

$$\omega_1^n = \Lambda_{1K}^n \omega^K, \omega_1^\alpha = \Lambda_{1K}^\alpha \omega^K, \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \nabla \Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n \omega^L, \nabla \Lambda_{1K}^\alpha + \Lambda_{1K}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{1KL}^\alpha \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha K}^n - \Lambda_{1K}^n \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L. \quad (1)$$

В дальнейшем мы рассматриваем регулярные гиперполосные распределения [7]; [8] для которых главный фундаментальный тензор $\Lambda_{11}^n \neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение обратный фундаментальный тензор 1-го порядка Λ_n^{11} :

$$\Lambda_n^{11} \Lambda_{11}^n = 1, \nabla \Lambda_n^{11} = \Lambda_n^{1K} \omega^K. \quad (2)$$

Из уравнений (1) следует, что регулярное $H(L)$ -распределение аффинного пространства A_n существует и определяется с произволом $2(n-2)+1=2n-3$ функций n аргументов в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

2. Для регулярного H -распределения согласно лемме Н.М. Остиану [6] возможна частичная канонизация репера R^0 , как это следует из дифференциальных уравнений

$$\nabla \Lambda_{\alpha 1}^n - \Lambda_{11}^n \omega_{\alpha}^1 = \Lambda_{\alpha 1 K}^n \omega^K. \quad (3)$$

Действительно, полагая

$$\Lambda_{\alpha 1}^n = 0$$

и учитывая (2), разрешим уравнения (3) относительно форм ω_{α}^1 :

$$\omega_{\alpha}^1 = \Lambda_{\alpha K}^1 \omega^K.$$

Геометрический смысл такой канонизации заключается в том, что векторы $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ помещаются в характеристику $X_{n-m-1}(A)$ гиперплоскости $H(A)$, полученную при смещении центра A вдоль кривых, принадлежащих L -подрасслоению. Выбранный таким образом репер R_1 [6] является репером 1-го порядка $H(L)$ -распределения. В дифференциальной окрестности 2-го порядка $H(L)$ -распределение задается относительно репера R [6] уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega_1^n &= \Lambda_{1K}^n \omega^K, \omega_{\alpha}^1 = \Lambda_{\alpha K}^1 \omega^K, \omega_1^{\alpha} = \Lambda_{1K}^{\alpha} \omega^K, \omega_{\alpha}^n = \Lambda_{\alpha \beta}^n \omega^{\beta}. \quad (4) \\ \nabla \Lambda_{11}^n &= \Lambda_{11K}^n \omega^K, \nabla \Lambda_{1\alpha}^n = \Lambda_{1\alpha K}^n \omega^K, \nabla \Lambda_{11}^{\alpha} + \Lambda_{11}^n \omega_n^{\alpha} = \Lambda_{11K}^{\alpha} \omega^K, \\ \nabla \Lambda_{1n}^n &- \Lambda_{11}^n \omega_n^1 - \Lambda_{1\alpha}^n \omega_n^{\alpha} = \Lambda_{1nK}^n \omega^K, \\ \nabla \Lambda_{1n}^{\alpha} - \Lambda_{11}^{\alpha} \omega_n^1 - \Lambda_{1\beta}^{\alpha} \omega_n^{\beta} + \Lambda_{1n}^n \omega_n^{\alpha} &= \Lambda_{1nK}^{\alpha} \omega^K, \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n = \Lambda_{\alpha\beta K}^n \omega^K, \\ \nabla \Lambda_{\alpha n}^n - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^{\beta} &= \Lambda_{\alpha n K}^n \omega^K, \quad (5) \\ \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^1 + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^1 &= \Lambda_{\alpha\beta K}^1 \omega^K, \nabla \Lambda_{\alpha 1}^1 = \Lambda_{\alpha 1 K}^1 \omega^K, \nabla \Lambda_{1\beta}^{\alpha} + \Lambda_{1\beta}^n \omega_n^{\alpha} = \Lambda_{1\beta K}^{\alpha} \omega^K, \\ \nabla \Lambda_{\alpha n}^1 - \Lambda_{\alpha 1}^1 \omega_n^1 - \Lambda_{\alpha\beta}^1 \omega_n^{\beta} + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_n^1 &= \Lambda_{\alpha n K}^1 \omega^K, \end{aligned}$$

где коэффициенты в правых частях уравнений (5) не симметричны по нижним индексам. Отметим, что геометрические объекты $\Gamma_1 = \{\Lambda_{1K}^n, \Lambda_{1K}^{\alpha}, \Lambda_{\alpha K}^n\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma, \Lambda_{\alpha K}^1, \Lambda_{1KL}^n, \Lambda_{1KL}^{\alpha}, \Lambda_{\alpha KL}^n\}$ являются фундаментальными геометрическими объектами $H(L)$ -распределения соответственно 1-го и 2-го порядка [3]. В общем случае (при локальной постановке

вопроса) определители $X_0 = \det \|\Lambda_{\alpha\beta}^n\|$, $H_0 = \det \|\Lambda_{ij}^n\|$ отличны от нуля. Компоненты определителя H_0 имеют следующее строение

$$H_0 = \det \|\Lambda_{ij}^n\| = \det \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^n & \Lambda_{1\beta}^n \\ 0 & \Lambda_{\alpha\beta}^n \end{vmatrix}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega^K.$$

Для невырожденных тензоров $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ и $\{\Lambda_{ij}^n\}$ введем, вообще говоря, несимметрические обращенные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}$ и $\{\Lambda_n^{ij}\}$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям [3]; [4]:

$$\Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\gamma}^n = \Lambda_n^{\beta\alpha} \Lambda_{\gamma\beta}^n = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \Lambda_n^{ij} \Lambda_{jk}^n = \Lambda_n^{ji} \Lambda_{ki}^n = \delta_k^i$$

и соответственно дифференциальным уравнениям

$$\nabla \Lambda_n^{\alpha\beta} = \Lambda_{nK}^{\alpha\beta} \omega^K, \nabla \Lambda_n^{ij} = \Lambda_{nK}^{ij} \omega^K,$$

Тензоры $\{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda_n^{ij}\}$ и $\{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda_n^{ij}\}$ являются фундаментальными тензорами 1-го порядка и обращенными фундаментальными тензорами 1-го порядка соответственно X-подрасслоения (распределение характеристик N(L)-распределения) и H-подрасслоения (распределения H-плоскостей)

§ 2. Соответствие Бомпьяни-Пантази

1. Следуя работам [1]; [4] введем биекцию Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода, для H-, L-, X-подрасслоений, ассоциированных с N(L)-распределением.

Определение. *Нормалью 1-го рода элемента H-распределения (плоскости H(A)) называется инвариантная прямая $N_1(A)$, удовлетворяющая условию $N_1(A) \cap H(A) = A$, а нормалью 2-го рода — инвариантная плоскость $\mathfrak{N}_{n-2}(A)$ такая что, $\mathfrak{N}_{n-2}(A) \subset H(A)$, $A \notin \mathfrak{N}_{n-2}(A)$.*

Поля нормалей 1-го рода $N_1(A)$ и нормалей 2-го рода $\mathfrak{N}_{n-2}(A)$ задаются соответственно полями объектов $\{v_n^i\}, \{v_i\}$:

$$\nabla v_n^i + \omega_n^i = v_{nK}^i \omega^K, \nabla v_i = v_{iK} \omega^K.$$

Определение. Будем говорить, что H -подрасслоение (соответственно L -подрасслоение, X -подрасслоение) нормализовано, если оно одновременно оснащено полями нормалей 1-го рода и 2-го рода Нордена [5], а саму нормализацию будем обозначать (v_n^i, v_i) или $(N_1, \mathfrak{N}_{n-2})$ (соответственно символами (v_n^1, v_1) , (v_n^α, v_α) или $(N_{n-1}, \mathfrak{N}_0)$, $(N_2, \mathfrak{N}_{n-3})$).

2. Зададим точку $F \in H(A)$ следующим образом

$$\vec{F} = \vec{A} + x^i \vec{e}_i, \quad x^n = 0. \quad (6)$$

Потребуем, чтобы она не выходила из гиперплоскости $H(A)$ при смещении центра A $H(L)$ -распределения вдоль кривой

$$\omega^i = v_n^i \omega^n,$$

касающейся нормали $v_1 = [A, \vec{v}] = [A, v^i \vec{e}_i + \vec{e}_n]$ 1-го рода гиперплоскости $H(A)$, т. е., чтобы

$$d\vec{F} = \vartheta^i \vec{e}_i, \quad (x^n = 0). \quad (7)$$

Определение. Точка F , удовлетворяющая условию (7) называется фокальной точкой гиперплоскости $H(A)$ [1]; [6] а направление смещения точки A , соответствующие фокальной точке F -фокальным направлением.

Из (7) в силу (*), (6) следует

$$\vartheta^i = dx^i + x^j \omega_j^i + \omega^i, \quad x^i \omega_i^n + \omega^n = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет многообразие фокальных точек гиперплоскости $H(A)$, которые согласно (3), (4), (5) приведем к виду:

$$v_i x^i - 1 = 0, \quad x^n = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} v_i &= -\Lambda_{ij}^n v_n^j - \mathcal{A}_i, \quad (a) \quad \nabla v_i = v_{iK} \omega^K, \\ \mathcal{A}_i &= \Lambda_{in}^n, \quad \nabla \mathcal{A}_i = \Lambda_{ij}^n \omega_n^j + \mathcal{A}_{iK} \omega^K, \\ \nabla v_{iK} &\equiv \Lambda_{iK}^n v_j \omega_n^j. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, уравнения (9) задают в локальном репере R_1 [1] нормаль 2-го рода плоскости $H(A)$, а поле нормалей 2-го рода

Н-подрасслоения задается дифференциальными уравнениями (10).
Разрешим уравнения (10а) относительно v_n^j :

$$v_n^s = -\Lambda_n^{si} v_i + \mathcal{A}_n^s(a), \nabla v_n^s + \omega_n^s = v_{nK}^s \omega^K, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^s &\stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{si} \mathcal{A}_i, \nabla \mathcal{A}_n^s + \omega_n^s = \mathcal{A}_{nK}^s \omega^K, \\ \nabla v_{nK}^s + \Lambda_{JK}^n v_n^j \omega_n^s + \Lambda_{JK}^n v_n^s \omega_n^j &\equiv 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, при помощи формул (10а) и (11а) устанавливается взаимно однозначное соответствие между нормальными 1-го и 2-го рода Н-распределения. Это соответствие (биекция) является для оснащающего Н-подрасслоения аналогом соответствия Бомпьяни-Пантази [1]; [4].

Аналогично, устанавливаем соответствие Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го рода $N_2(v_n^\alpha)$ и нормальными 2-го рода $\mathfrak{N}_{n-3}(v_\alpha)$ X-подрасслоения:

$$v_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\beta - \mathcal{A}_\alpha, \nabla v_\alpha = v_{\alpha K} \omega^K, \nabla v_{\alpha K} \equiv \Lambda_{\alpha K}^n v_{\beta} \omega_n^\beta, \quad (13)$$

$$v_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta} v_\beta + \mathcal{A}_n^\alpha, \nabla v_n^\alpha + \omega_n^\alpha = v_{nK}^\alpha \omega^K, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha n}^n, \nabla \mathcal{A}_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta + \mathcal{A}_{\alpha K} \omega^K, \\ \mathcal{A}_n^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{\alpha\beta} \mathcal{A}_\beta, \nabla \mathcal{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathcal{A}_{nK}^\alpha \omega^K, \\ \nabla v_{nK}^\alpha - (\Lambda_{1K}^\alpha - \Lambda_{1K}^n v_n^\alpha) \omega_n^1 + \Lambda_{\beta K}^n v_n^\beta \omega_n^\alpha + \Lambda_{\beta K}^n v_n^\alpha \omega_n^\beta &\equiv 0. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Из (12) следует, что компонента $\{A_n^1\}$ квазитензора $\{A_n^s\}$ имеет следующее строение

$$\mathcal{A}_n^1 \stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{11} \Lambda_{1n}^n - \Lambda_n^{1\alpha} \Lambda_{\alpha n}^n$$

и является квазитензором 1-го порядка

$$\nabla \mathcal{A}_n^1 + \omega_n^1 = \mathcal{A}_{nK}^1 \omega^K. \quad (16)$$

Будем искать соответствие Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода L-подрасслоения в виде (11), (13)

$$v_n^1 = -\Lambda_n^{11} v_1 + \mathcal{A}_n^1, \nabla v_n^1 + \omega_n^1 = v_{nK}^1 \omega^K, \quad (17)$$

Разрешив уравнения (17) относительно величины $\{v_1\}$ получим

$$v_1 = -\Lambda_{11}^n v_n^1 - \vec{\mathcal{A}}_1, \nabla v_1 = v_{1K} \omega^K,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_{11}^n \mathcal{A}_n^1, \nabla \vec{\mathcal{A}}_1 = \Lambda_{11}^n \omega_n^1, \\ \nabla v_{nK}^1 - (\Lambda_{\alpha K}^1 - \Lambda_{\alpha K}^n v_n^1) \omega_n^1 + 2\Lambda_{1K}^n v_n^1 \omega_n^1 &\equiv 0. \\ \nabla v_{1K} &\equiv \Lambda_{1K}^n v_1 \omega_n^1. \end{aligned}$$

4. Отметим, что поле квазитензора $\{\mathcal{A}_n^i\}$ (12) для гиперплоскостного распределения аффинного пространства было введено Алшибая Э.Д. [1]; [2] и дана его геометрическая интерпретация. В силу этого поле нормалей 1-го рода $N_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_1$ (поле нормалей $\vec{\mathcal{A}}_1 \{\mathcal{A}_n^i\}$) оснащающего Н-подрасслоения данного Н(L)-распределения, будем называть в дальнейшем полем нормалей Алшибая Э.Д. В соответствии с этой терминологией поле нормалей 1-го рода $N_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_2$ ($N_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{n-1}$), определяемое полем квазитензора \mathcal{A}_n^α (15) (\mathcal{A}_n^1 (16)), назовем полем нормалей Алшибая 1-го рода X-подрасслоения (L-подрасслоения). Следуя работам [1]; [2] аналогично можно показать, что свойства нормалей Алшибая $\vec{\mathcal{A}}$ сохраняют силу и в случае Н(L)-распределения:

а. при смещении центра А Н(L)-распределения вдоль кривой, касающейся нормали Алшибая $\vec{\mathcal{A}}$, гиперплоскостной элемент Н(А) смещается параллельно;

б. в биекции Бомпьяни-Пантази (11) нормали Алшибая $\vec{\mathcal{A}}$, определенной объектом $\{\mathcal{A}_n^s\}$ (12), соответствует бесконечно удаленная (n-2) — плоскость гиперплоскости Н(А) (в этом случае в уравнении (10) $v_i = 0$).

§ 3. Фокальные образы

1. Пусть задано поле нормалей 1-го рода $N_1 = [A, \vec{v}_n = v_n^i \vec{e}_i + \vec{e}_n]$ оснащающего Н-подрасслоения:

$$\nabla v_n^i + \omega_n^i = v_{nK}^i \omega^K.$$

Рассмотрим фокальные образы, связанные с L-, X-подрасслоениями данного Н(L)-распределения. Найдем фокальное многообразие $\Phi(v_{n-1}, L)$ нормали 1-го рода $N_{n-1}(A) = [A, \vec{v}_n, X]$ прямой L(A) при смещении центра А вдоль кривых (ℓ), принадлежащих L-подрасслоению:

$$(\ell): \begin{cases} \omega^1 = \mu^1 \theta, \nabla \mu^1 - \mu^1 \theta_1 = \mu_1^1 \theta, D\theta = \theta \wedge \theta_1, \\ \omega^\alpha = 0, \omega^n = 0. \end{cases}$$

Пусть F — фокальная точка плоскости $N_{n-1}(A)$:

$$\vec{F} = \vec{A} + y^\alpha \vec{e}_\alpha + y^n \vec{v}_n,$$

где

$$\vec{v}_n = v_n^i \vec{e}_i + \vec{e}_n.$$

Из условия ее фокальности

$$d\vec{F} = \vartheta^\alpha \vec{e}_\alpha + \vartheta^n (v_n^1 \vec{e}_1 + v_n^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_n)$$

в силу соотношений (1), (3), (14), (17) находим

$$\vartheta^n = dy^n + y^n \omega_n^n + y^n v_n^1 \omega_1^n; \vartheta^\alpha = dy^\alpha + y^\beta \omega_\beta^\alpha + y^n (v_{n1}^\alpha + v_{11}^\alpha v_n^1) \omega^1, \\ [\delta_1^1 + y^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1 + y^n (v_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n v_n^1 v_n^1 + v_n^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1)] \omega^1 = 0, \quad (18)$$

где

$$v_{11}^\alpha = \Lambda_{11}^\alpha - \Lambda_{11}^n v_n^\alpha, \nabla v_{11}^\alpha \equiv 0.$$

Так как уравнения (18) выполняются тождественно, то

$$\lambda_\alpha y^\alpha + v_n y^n - 1 = 0,$$

где

$$\lambda_\alpha = -\Lambda_{\alpha 1}^1, \nabla \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha K} \omega^K, \\ v_n = -(v_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n v_n^1 v_n^1 + v_n^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1), \nabla v_n = v_{nK} \omega^K. \quad (19)$$

Итак, фокальное многообразие $\Phi(N_{n-2}, L)$, которое в локальном репере R^1 задается уравнениями

$$\begin{cases} \lambda_\alpha y^\alpha + v_n y^n - 1 = 0, \\ y^1 = v_n^1 y^n, \end{cases}$$

есть плоскость $K_{n-2} \subset N_{n-1}(A)$. Плоскость $K_{n-2}(A)$ является аналогом плоскости Кёнигса [8] для данного $H(L)$ -распределения. Точку пересечения нормали \vec{v}_n с плоскостью $K_{n-2}(A)$, т. е. точку

$$K_n(v): y^n = \frac{1}{\lambda_\alpha v_n^\alpha + v_n}; y^i = \frac{1}{\lambda_\alpha v_n^\alpha + v_n} v_n^i,$$

назовем *точкой Кёнигса нормали \vec{v}_n* , ассоциированной с L -подрасслоением или кратко vL — *виртуальной точкой Кенигса*. Определим в каждом центре A еще одну инвариантную плоскость

$$K_{n-3}(A) = X(A) \cap K_{n-2}(A): y^1 = 0, y^n = 0, \lambda_\alpha y^\alpha - 1 = 0, (20)$$

которая является нормалью 2-го рода плоскости $X(A)$. Итак, структура плоскости Кенигса $K_{n-2}(v)$ такова, что

$$K_{n-2}(v) = [K_{n-3}(A), K_n(v)].$$

Если задать другое поле инвариантных нормалей \vec{v}_n^* N -подрасслоения, то в соответствующей точке A плоскость Кенигса имеет вид

$$K_{n-2}(v^*) = [K_{n-3}(A), K_n(v^*)],$$

т. е. плоскость $K_{n-3}(A)$ есть ось оснащающих плоскостей Кёнигса в нормалях 1-го рода N_{n-1} L -подрасслоения в данном центре A .

Следовательно, имеет место

Теорема 1. Для пучка нормалей 1-го рода $N_{n-1}(A)$ прямой $L(A)$ в данном центре A все плоскости Кенигса проходят через неподвижную (инвариантную) плоскость $K_{n-3}(A)$ (20) — ось пучка плоскостей Кенигса.

2. Аналогично, находим в каждом центре A фокальное многообразие $\Phi(N_2, X(A))$ нормали 1-го рода $N_2(A)$ плоскости $X(A)$, при смещениях центра A вдоль кривых (χ) :

$$(\chi): \begin{cases} \omega^\alpha = \mu^\alpha \theta, \nabla \mu^\alpha - \mu^\alpha \theta_1 = \tilde{\mu}_1^\alpha \theta, D\theta = \theta \wedge \theta_1, \\ \omega^1 = 0, \omega^n = 0, \end{cases}$$

принадлежащих X -подрасслоению.

Зададим фокальную точку F плоскости $N_2(A)$ вектором:

$$\vec{F} = \vec{A} + y^1 \vec{e}_1 + y^n \vec{v}_n,$$

где

$$\vec{v}_n = v_n^i \vec{e}_i + \vec{e}_n.$$

Требование инвариантности точки F , т. е.

$$d\vec{F} = \vartheta^n \vec{e}_n + \vartheta^1 \vec{e}_1$$

приводит к соотношениям

$$\vartheta^n = dy^n + y^n \omega_n^n + y^n v_n^1 \omega_1^n + y^n v_n^\beta \omega_\beta^n + y^1 \omega_1^n;$$

$$\begin{aligned} \vartheta^1 &= dy^1 + y^1 \omega_1^1 - y^1 \Lambda_{1\beta}^n v_n^1 \omega^\beta \\ &+ y^n (v_{n\beta}^1 + \Lambda_{\alpha\beta}^1 v_n^\alpha - \Lambda_{11}^n v_n^1 v_n^1 - \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^1 v_n^\alpha) \omega^1, \\ [\delta_\beta^\alpha + y^1 v_{1\beta}^\alpha + y^n (v_{n\beta}^\alpha + v_{1\beta}^\alpha v_n^1 - \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\alpha v_n^\alpha)] \omega^\beta &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$v_{1\beta}^\alpha = \Lambda_{1\beta}^\alpha - \Lambda_{1\beta}^n v_n^\alpha, \nabla v_{1\beta}^\alpha \equiv 0. \quad (22)$$

Условие (21) выполняется тождественно, поэтому

$$\delta_\beta^\alpha + y^1 v_{1\beta}^\alpha + y^n (v_{n\beta}^\alpha + v_{1\beta}^\alpha v_n^1 - \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\alpha v_n^\alpha) = 0. \quad (23)$$

Свертывая по α и β выражение (23) и преобразуя, получим

$$\tilde{v}_1 y^1 + \tilde{v}_n y^n - 1 = 0,$$

где

$$\tilde{v}_1 = -\frac{1}{n-2} \Lambda_{1\alpha}^\alpha, \nabla \tilde{v}_1 = \tilde{v}_{1K} \omega^K, \quad (24)$$

$$\tilde{v}_n = -\frac{1}{n-2} (v_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\alpha}^n v_n^\gamma v_n^\alpha + v_{1\alpha}^\alpha v_n^1), \nabla \tilde{v}_n = \tilde{v}_{nK} \omega^K. \quad (25)$$

Таким образом, фокальное многообразие $\Phi(N_2, X)$, представляет собой прямую $\tilde{K}_1(A) \subset N_2(A)$, которая относительно локального репера R^1 задается системой уравнений:

$$\tilde{K}_1(A): \begin{cases} \tilde{v}_1 y^1 + \tilde{v}_n y^n - 1 = 0, \\ y^\alpha = v_n^\alpha y^n, \end{cases} \quad (26)$$

Прямую $\tilde{K}_1(v)$ (26) назовем vX — *виртуальной прямой Кёнигса* плоскости $N_2(A) = [A, L, \vec{v}_n]$ в центре A .

Поле прямых (26) задается уравнениями (24), (25), (14) т. е. полями объектов $\{v_n^\alpha\}, \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_n\}$.

Точка $\tilde{K}(v) = \tilde{K}_1(A) \cap L(A)$ является нормалью 2-го рода в смысле Нордена прямой $L(A)$:

$$\tilde{K}(v): y^\alpha = 0, y^n = 0; \tilde{v}_1 y^1 - 1 = 0. \quad (27)$$

Если тензор $\tilde{v}_1 = 0$, то точка $\tilde{K}(v) \subset L(A)$ есть несобственная точка прямой $L(A)$. Точку $\tilde{K}(v)$ (27) назовем v — *виртуальной точкой Кёнигса* прямой $L(A)$, так как она зависит от выбора нормали $\{v_n^i\}$ (нормали \vec{v}_n плоскости $H(A)$).

Точку

$$\tilde{K}_n(v): y^n = \frac{1}{\tilde{v}_1 v_n^1 + \tilde{v}_n}; y^i = \frac{1}{\tilde{v}_1 v_n^1 + \tilde{v}_n} v_n^i,$$

• точку пересечения нормали $N_1(v_n^i)$ с прямой \tilde{K}_1 (26), назовем точкой Кёнигса нормали $N_1=[A, \vec{v}_n]$, ассоциированной с плоскостью $X(A)$, или коротко vX — *виртуальной точкой Кёнигса*. Итак, структура прямой $\tilde{K}_1(A)$ (26) такова:

$$\tilde{K}_1(A)=[\tilde{K}(A), \tilde{K}_n(v)].$$

Заметим, что порядок охвата тензоров v_n (19), \tilde{v}_n (25), на единицу выше, чем порядок объекта $\{v_n^\alpha\}$ (14).

§ 4. Поля нормализаций и пучки нормалей 1-го и 2-го Нордена основных структурных подрасслоений $H(L)$ -распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка

1. Согласно уравнениям (5), (2) убеждаемся, что функции

$$V_n^\alpha = -\Lambda_{11}^\alpha \Lambda_n^{11}, \nabla V_n^\alpha + \omega_n^\alpha = V_{nK}^\alpha \omega^K \quad (28).$$

образуют квазитензор 1-го порядка и, следовательно, дифференциальные уравнения (28) задают поле нормалей 1-го рода V_2 X -подрасслоения.

Используя биекцию (13), находим соответствующее поле нормалей 2-го рода X -подрасслоения:

$$V_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\beta - A_\alpha, \nabla V_\alpha = v_{\alpha K} \omega^K.$$

Далее с помощью объекта $\{V_n^\alpha\}$ и соотношения (22) построим тензоры $\{V_{1\beta}^\alpha\}$ и $\{V_1\}$:

$$V_{1\beta}^\alpha = \Lambda_{1\beta}^\alpha - \Lambda_{1\beta}^n v_n^\alpha; \nabla V_{1\beta}^\alpha \equiv 0, V_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-2} V_{1\alpha}^\alpha, \nabla V_1 \stackrel{\text{def}}{=} V_{1K} \omega^K. \quad (29)$$

Полю нормалей 2-го рода $\{V_1\}$ (29) в силу биекции (17) соответствует поле нормалей 1-го рода $\{V_n^1\}$ L -подрасслоения:

$$V_n^1 = -\Lambda_n^{11} V_1 + \mathcal{A}_n^1, \nabla V_n^1 + \omega_n^1 = V_{nK}^1 \omega^K.$$

В дифференциальной окрестности 1-го порядка введем функции

$$\{V_n^i\} \stackrel{\text{def}}{=} \{V_n^1; V_n^\alpha\}, \{V_i\} = \{V_1; V_\alpha\}, \quad (30)$$

удовлетворяющие соответственно уравнениям:

$$\nabla V_n^i + \omega_n^i = V_{nK}^i \omega^K, \nabla V_i = V_{iK} \omega^K.$$

Заметим, что геометрические объекты (30) соответствуют друг другу в биекции Бомпьяни-Пантази (10) (или (11)).

2. Для H -подрасслоения гиперполосного $H(L)$ -распределения справедливо предложение, доказанное для гиперплоскостного распределения аффинного пространства A_n Алшибая Э.Д. [1].

Теорема 2. *Однопараметрическому пучку нормалей 1-го рода $(\vec{V}(\varepsilon); \vec{A})$, определенному в данном центре A H -подрасслоения (ε -параметр), в биекции Бомпьяни-Пантази соответствует однопараметрический пучок параллельных $(n-2)$ -плоскостей (пучок нормалей 2-го рода), лежащих в плоскости $H(A)$.*

Покажем, что аналогичное предложение имеет место и для X -подрасслоения данного $H(L)$ -распределения пространства A_n . Пусть в центре A $H(L)$ -распределения задан пучок нормалей 1-го рода $\{v_n^\beta(\sigma)\}$ X -подрасслоения в смысле Нордена:

$$v_n^\beta(\sigma) = \mathcal{A}_n^\beta + \sigma(v_n^\beta - \mathcal{A}_n^\beta), \quad (31)$$

где объект $\{v_n^\beta\}$ задает произвольную инвариантную нормаль $N_2(A)$ плоскости $X(A)$. В силу формул (13) пучку (31) в биекции (13) соответствует пучок нормалей 2-го рода, в смысле Нордена следующего вида:

$$\begin{aligned} v_\alpha(\sigma) &= -\Lambda_{\alpha\beta}^n \left(\mathcal{A}_n^\beta + \sigma(v_n^\beta - \mathcal{A}_n^\beta) \right) - \mathcal{A}_\alpha = \\ &= -\Lambda_{\alpha\beta}^n \mathcal{A}_n^\beta + \sigma \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} v_\gamma - \mathcal{A}_\alpha = \sigma v_\alpha, \end{aligned}$$

т. е. пучок параллельных $(n-3)$ -плоскостей, лежащих в плоскости $X_{n-2}(A)$.

Итак, справедлива

Теорема 3. *Однопараметрическому пучку нормалей 1-го рода (31) X -подрасслоения в биекции Бомпьяни-Пантази (13) соответ-*

ствует однопараметрический пучок параллельных $(n-3)$ -плоскостей-нормалей 2-го рода Нордена X -подрасслоения.

Аналогичное утверждение имеет место и для L -подрасслоения.

Теорема 4. Однопараметрическому пучку $(v_n^1(\sigma); \mathcal{A}_n^1)$ (32) нормалей 1-го рода Нордена L -подрасслоения, где

$$v_n^1(\sigma) = \mathcal{A}_n^1 + \sigma(v_n^1 - \mathcal{A}_n^1), \quad (32)$$

в биекции Бомпьяни — Пантази соответствует однопараметрическое семейство точек $v_1(\sigma) = \sigma v_1$, — нормалей 2-го рода в смысле Нордена L -подрасслоения.

3. Квазитензоры $\{A_n^i\}, \{V_n^i\}$ в общем случае функционально независимы и поэтому определяют в дифференциальной окрестности 1-го порядка в каждом центре A однопараметрический пучок нормалей 1-го рода H -подрасслоения:

$$\mathcal{H}_n^i(\varepsilon) = V_n^i + \varepsilon(\mathcal{A}_n^i - V_n^i), \quad (33)$$

которым в биекции (10) согласно теореме 3 соответствует пучок параллельных $(n-2)$ -плоскостей (нормалей 2-го рода H -подрасслоения)

$$\mathcal{h}_i(\varepsilon) = \varepsilon V_i, \quad (34)$$

где

$$\mathcal{h}_i(\varepsilon) = V_i + \varepsilon(A_i - V_i), \nabla \mathcal{h}_i(\varepsilon) = \mathcal{h}_{iK} \omega^K$$

Пучки (33) и (34) порождают соответственно пучки нормалей 1-го и 2-го рода X -, L -подрасслоений в смысле Нордена:

$$\mathcal{H}_n^\alpha(\varepsilon) = V_n^\alpha + \varepsilon(\mathcal{A}_n^\alpha - V_n^\alpha), \mathcal{h}_a(\varepsilon) = \varepsilon V_a, \\ \mathcal{H}_n^1(\varepsilon) = V_n^1 + \varepsilon(\mathcal{A}_n^1 - V_n^1), \mathcal{h}_1(\varepsilon) = \varepsilon V_1,$$

где

$$\mathcal{h}_a(\varepsilon) = V_a + \varepsilon(A_a - V_a), \nabla \mathcal{h}_a(\varepsilon) = \mathcal{h}_{aK} \omega^K, \\ \mathcal{h}_1(\varepsilon) = V_1 + \varepsilon(A_1 - V_1), \nabla \mathcal{h}_1(\varepsilon) = \mathcal{h}_{1K} \omega^K.$$

В результате имеет место

Теорема 5. $H(L)$ -распределение внутренним инвариантным образом порождает пучки нормалей 1-го рода $(A_n^1; V_n^1)$, $(A_n^\alpha; V_n^\alpha)$, $(A_n^1; V_n^1)$ и 2-го рода $(A_i; V_i)$, $(A_a; V_a)$, $(A_i; V_1)$ в смысле Нордена соответственно H -, X -, L - подрасслоений, а также их нормализации $(V_n^1; V_i)$, $(V_n^\alpha; V_a)$, $(V_n^1; V_1)$ в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

Список литературы:

1. Алшибая Э.Д. Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве. Из-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1999. — 106 с.
2. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геометрического семинара /ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — Т. 5. — С. 169—193.
3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. Об-ва. — 1953. — Т. 2. — с. 275—382.
4. Лаптев Г.Ф. Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I. // Труды геометрического семинара — 1971. — Т. 3 — с. 49—94.
5. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. 1976. — 432 с.
6. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. Math. Pures et appl(RPR) — 1962. — Т. 7. — № 2. — С. 239—263.
7. Попов Ю.И. Нормали гиперполосного распределения аффинного пространства // Сб. «Дифф. геом. многообразий фигур». — 1988 — Вып. 19 — с. 69—79.
8. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного распределения m -мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. — 1975. — Т. 7. — С. 117—151.

СЕКЦИЯ 2.

ФИЗИКА

2.1. ОПТИКА

СИНХРОНИЗАЦИЯ И ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ ЧИП-ЛАЗЕРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ШУМА

Дудецкий Вадим Юрьевич

*аспирант физического факультета,
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.*

РФ, г. Москва

E-mail: mazarito@yandex.ru

SYNCHRONIZATION AND DESYNCHRONIZATION OF SELF-MODULATION OSCILLATIONS IN A RING CHIP LASER UNDER THE INFLUENCE OF A PERIODIC SIGNAL AND NOISE

Vadim Dudetskiy

*postgraduate student department of Physics,
of Moscow State University M.V. Lomonosov,
Russia, Moscow*

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты численного моделирования и экспериментальных исследований влияния шума накачки на синхронизацию автомодуляционных колебаний в твердотельном кольцевом лазере с периодической модуляцией накачки. Установлено, что в отличие от эффекта десинхронизации, обычно возникающего под действием

шума при синхронизации автоколебаний (порядка $1/1$) периодическим сигналом, синхронизация порядка $1/2$ может сопровождаться конструктивным воздействием шума. При достаточно малых интенсивностях шум накачки способствует синхронизации автоколебаний, сужению их спектра и увеличению отношения сигнал/шум.

ABSTRACT

The result of numerical simulation and experimental studies of the effect of pump noise on the synchronization of self-oscillations in a solid-state ring laser with periodic modulation. It is found that, in contrast to the desynchronization effect, usually occurring under the action of noise on the synchronization of self-oscillations (of the order of $1/1$) periodic signal, synchronization of the order of $1/2$ may be accompanied by constructive effects of noise. At a sufficiently low intensity noise of the pump contributes to the synchronization of self-oscillations, narrowing their range and increasing the signal-to-noise ratio.

Ключевые слова: Твердотельный кольцевой лазер; автомодуляционный режим генерации; синхронизация частоты; десинхронизация частоты; шум; спектр; бистабильность; стохастический резонанс.

Keywords: A solid-state ring laser; automodulation the mode of generation; frequency synchronization; desynchronization frequency; the noise; spectrum; bistability; stochastic resonance.

Введение

Синхронизация колебаний, возникающих в нелинейных динамических системах, является фундаментальным явлением, исследованию которых посвящено ряд работ (см, например, монографии [8; 11]). Общий случай вынужденной синхронизации автоколебаний порядка n/m характеризуется следующим соотношением между частотой внешнего сигнала ω и частотой синхронизованных колебаний Ω_s : $n\omega = m\Omega_s$, где n и m — целые числа.

В работах [8—11] исследовано влияние шумов на синхронизацию автоколебаний порядка $1/1$. Под воздействием шума, вследствие диффузии фазы автоколебаний, происходит уширение спектра синхронизованных автоколебаний, и при достаточно сильном шуме происходит десинхронизация.

Такие качественные изменения были установлены теоретически и наблюдались экспериментально лишь в случае вынужденной синхронизации периодических автоколебаний порядка $1/1$. В настоящей работе проведены теоретические и экспериментальные исследования, в которых изучено влияние шума накачки на синхронизацию

периодических автомодуляционных колебаний порядка $1/2$ в твердотельном кольцевом лазере (ТКЛ). Проведенные исследования показали, что в определенном диапазоне интенсивностей шума накачки стохастическое воздействие играет конструктивную роль: шум способствует синхронизации автоколебаний, сужению их спектра и увеличению отношения сигнал/шум.

Кроме того, ранее синхронизация автомодуляционных колебаний излучения ТКЛ исследовалась теоретически и экспериментально в условиях, когда внешний сигнал, вызывающий синхронизацию, является периодическим. Важное отличие исследований, проведенных в представленной работе, состоит в том, что помимо периодической модуляции накачки осуществлялась также и шумовая модуляция с помощью генератора шума, включенного в цепь питания лазера накачки.

Численное моделирование

При численном моделировании в настоящей работе использовалась векторная модель ТКЛ [2; 3; 5].

Периодическая модуляция накачки описывается зависящим от времени превышением накачки над порогом $\eta(t)$, которое имеет вид: $\eta(t) = \eta_0 + h \sin(2\pi f_p t)$, где η_0 — превышение накачки над порогом в отсутствие модуляции накачки, h, f_p — глубина и частота модуляции накачки. Считаем, что шумовая модуляция накачки производится белым шумом и задана случайной функцией $\xi(t)$: $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D_p \delta(t-t')$, где D_p — коэффициент диффузии (интенсивность) шума.

Численное моделирование проводилось при параметрах, близких к экспериментально измеренным параметрам кольцевого чип-лазера на Nd:YAG.

Время релаксации равно $T_1=240$ мкс. Ширина полосы резонатора определялась по релаксационной частоте $\omega_r = \sqrt{\eta\omega_c / QT_1}$. В исследуемом лазере при $\eta_0=0.2$ основная релаксационная частота равнялась $\omega_r / 2\pi = 98,5$ кГц, что дает величину $\omega_c/Q = 4.37 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$. Значение поляризационного параметра $\beta=0,75$ было найдено (так же, как и в [3]) по экспериментально измеренной зависимости дополнительной релаксационной частоты ω_{r1} от частотной невязанности резонатора Ω .

При численном моделировании были выбраны следующие значения модулей коэффициентов связи: $m_1 = 1986400 \text{ с}^{-1}$, $m_2 = 861356 \text{ с}^{-1}$.

При этих значениях коэффициентов связи, частота автомодуляционных колебаний и отношение средних значений интенсивностей встречных волн близки к экспериментально измеренным значениям.

Разность фаз комплексных коэффициентов связи $\tilde{m}_{1,2}$ трудно оценить по характеристикам автомодуляционных колебаний. Для простоты, разность фаз коэффициентов связи $\vartheta_1 - \vartheta_2$ полагалась равной нулю. Предполагалось также, что частотная и амплитудная невязанности кольцевого резонатора отсутствуют ($\Omega=0$, $\Delta = \omega_c / 2Q_2 - \omega_c / 2Q_1 = 0$).

Параметры исследуемого двунаправленного чип–лазера были выбраны таким образом, что в отсутствие шумовой модуляции накачки чип–лазер работал в автомодуляционном режиме первого рода.

В спектре мощности лазера, работающего в этом режиме, имеется один пик на частоте автомодуляции f_m .

В проведенных ранее исследованиях [1; 4; 6; 12] по синхронизации автомодуляционных колебаний рассматривалась синхронизация, возникающая при частотах модуляции накачки, f_p , близких к частоте автомодуляционных колебаний f_m (синхронизация порядка 1/1).

В настоящей работе исследована синхронизация автомодуляционных колебаний при частотах модуляции f_p , близких к $2f_m$ (синхронизация порядка 1/2).

В этом случае при малой глубине модуляции накачки h отсутствует субгармоника $f_p/2$, на которой мог бы возникнуть захват частоты автомодуляции внешним сигналом ($f_m = f_p/2$). С увеличением h может произойти параметрическая раскачка субгармоники $f_p/2$ и при $h \geq h_1$, где h_1 — граница области синхронизации, частота автомодуляционных колебаний захватывается субгармоникой $f_p/2$.

После того, как возникла синхронизация, она будет сохраняться и при плавном уменьшении h вплоть до второй границы области синхронизации h_2 . В области между двумя этими границами ($h_1 \leq h \leq h_2$) имеет место бистабильность.

Границы области синхронизации порядка $1/2$, найденные путем численного моделирования при $\eta_0 = 0.15$, показаны на рис. 1.

В этом случае, при отсутствии модуляции накачки, частота автомодуляционных колебаний равнялась $f_m = 208,5$ кГц.

Отметим, что ширина области синхронизации порядка $1/2$ значительно уже (на порядок и более), чем в случае синхронизации порядка $1/1$ (см. для сравнения [1; 4; 6; 12]).

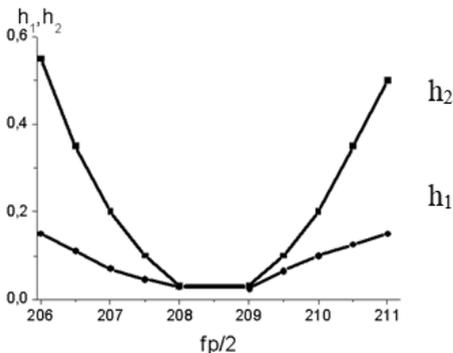


Рисунок 1. Границы h_1, h_2 области синхронизации порядка $1/2$ при воздействии на чип-лазер периодического сигнала модуляции накачки с частотами f_p , близкими к удвоенной автомодуляционной частоте f_m

Рассмотрим влияние шума на синхронизацию автомодуляционных колебаний порядка $1/2$. На рис. 2, а пунктирной кривой показан спектр интенсивности автомодуляционных колебаний в отсутствие шумовой модуляции накачки.

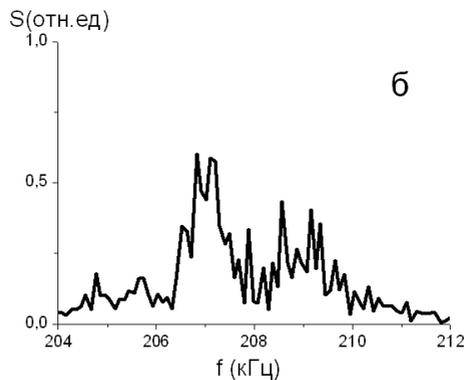
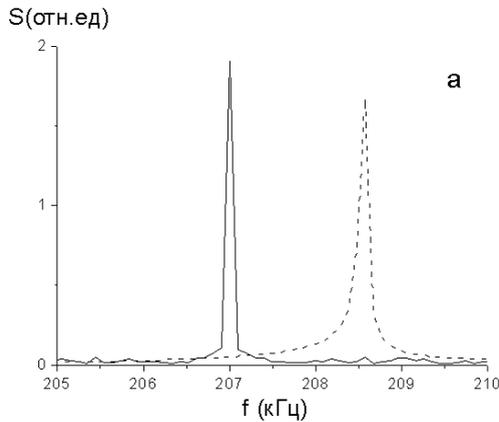
В этом случае имела место периодическая модуляция накачки на частоте $f_p = 414$ кГц с глубиной модуляции $h = 0.15$, однако (поскольку $h < h_1$) синхронизация порядка $1/2$ не возникала, и частота автомодуляционных колебаний оставалась такой же, как и при отсутствии периодической модуляции ($f_m = 208,5$ кГц).

Сплошной линией на рис. 2, а показан спектр, наблюдаемый при наличии шума накачки с интенсивностью (коэффициентом диффузии) $D_p = 1 * 10^{13} \text{ c}^{-1}$.

В относительных единицах, которые используются далее для сравнения с экспериментом, интенсивность шума оказывается равной $D = D_p / 10^{14} = 0.1$.

Под действием шума происходит переход в режим синхронизации порядка $1/2$, частота автомодуляционных колебаний захватывается субгармоникой периодического сигнала модуляции накачки $f_p / 2 = 207$ кГц.

Спектр, показанный на рис. 2, а, характерен для случая шума с достаточно малой интенсивностью, $D < 0,5$. С увеличением интенсивности шума возрастает диффузия фазы автомодуляционных колебаний и происходит их десинхронизация (см. рис. 2, б, в).



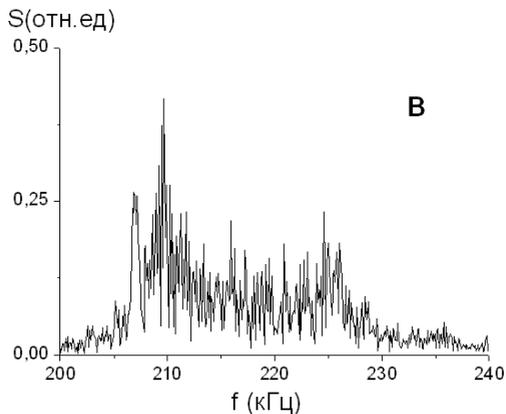


Рисунок 2. Спектры интенсивности автомодуляционных колебаний при периодической модуляции накачки с частотой $f_p = 414$ кГц и глубиной модуляции $h = 0.15$: (а) при отсутствии шума (пунктир) и при наличии шума с интенсивностью $D = 0.1$ (сплошная линия); (б) при интенсивности шума $D = 3$; (в) при интенсивности шума $D = 5$

На рис. 3 показана зависимость отношения сигнал/шум для синхронизации порядка $1/2$ (при частоте модуляции накачки $f_p = 412$ кГц) от интенсивности шума D , найденная при численном моделировании в случае $h = 0.3$, $\eta_0 = 0.15$.

Для вычисления отношения S/N проводилось усреднение по 150 реализациям.

Как видно из этого рисунка, синхронизация порядка $1/2$ возникает скачком, начиная с некоторого порогового значения интенсивности шума D .

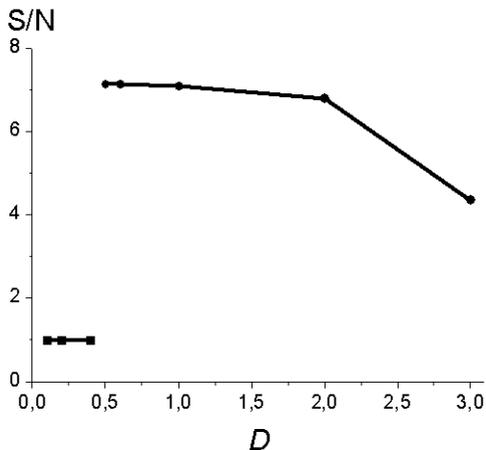


Рисунок 3. Зависимость отношения сигнал/шум при синхронизации порядка 1/2 от интенсивности шума D (частота модуляции накачки $f_p = 412$ кГц, $h = 0.3$, $\eta_0 = 0.15$)

С увеличением интенсивности шума отношение сигнал/шум изменяется так же, как в случае стохастического резонанса [7; 13]: оно растет при малых интенсивностях и уменьшается при больших.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальные исследования, как и в случае численного моделирования, проводились на ТКЛ, работающем в автомодуляционном режиме первого рода. При этом интенсивности встречных волн совершают противофазные гармонические колебания.

Спектры интенсивности излучения для встречных волн в таком режиме оказываются идентичными, по этой причине ниже приводятся лишь спектры для одной из волн.

На рис. 4, а приведен спектр интенсивности одной из волн в окрестности частоты автомодуляционных колебаний в отсутствие шумовой модуляции накачки ($D=0$, $h=0,27$, $f_p/2 = 420$ кГц), показывающий, что частота автомодуляционных колебаний в исследуемом чип-лазере оказывается нестабильной и флуктуирует; ширина спектра около 5 кГц.

В этом случае синхронизация автоколебаний не происходит.

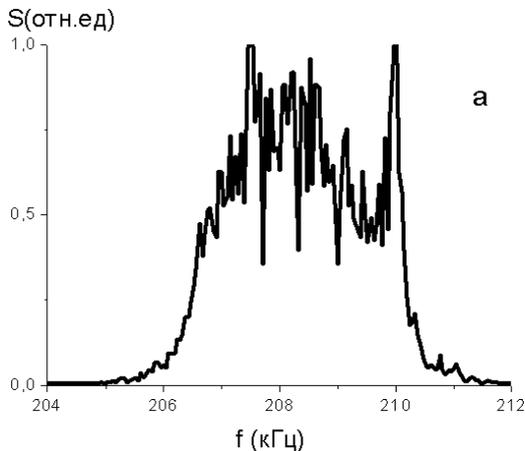
В режиме синхронизации порядка 1/2 (рис. 4, б, 4, в), возникающем при добавлении шума к периодической модуляции накачки, в спектре интенсивности излучения появляется узкий пик на субгар-

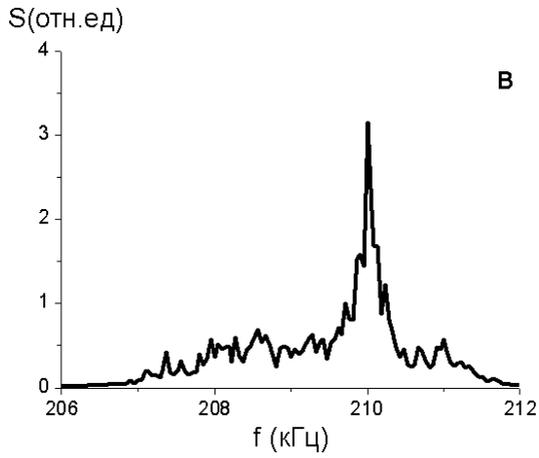
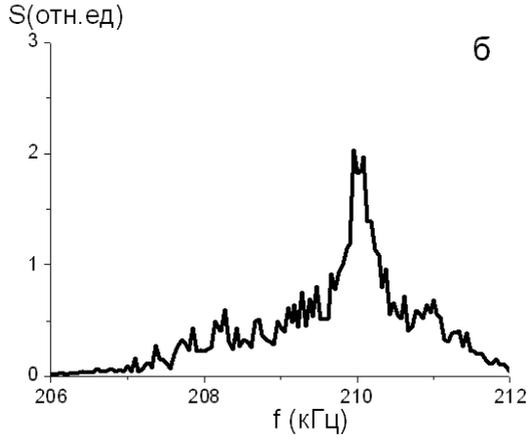
монике периодического сигнала модуляции ($f_p/2 = 210$ кГц). С увеличением интенсивности шума интенсивность этого пика сначала растет, а затем происходит десинхронизация, и пик на субгармонике периодического сигнала уширяется и исчезает.

Сравнение экспериментально измеренных спектров (рис. 4) с рассчитанными при численном моделировании (рис. 2) позволяет сделать вывод о конструктивной роли шума накачки, которая проявляется в стохастическом возбуждении синхронизации автоколебаний порядка $1/2$ при достаточно малых интенсивностях шума. В области достаточно больших интенсивностей шума возникает десинхронизация.

Различие между спектрами, полученными в эксперименте и при численном моделировании, вызвано тем обстоятельством, что в эксперименте (даже при отсутствии внешнего шума, создаваемого генератором) имеются значительные шумы, приводящие к флуктуациям частоты автомодуляционных колебаний и уширению их спектра.

При численном моделировании в отсутствие шумовой модуляции такие флуктуации отсутствуют, и спектр автомодуляционных колебаний значительно уже.





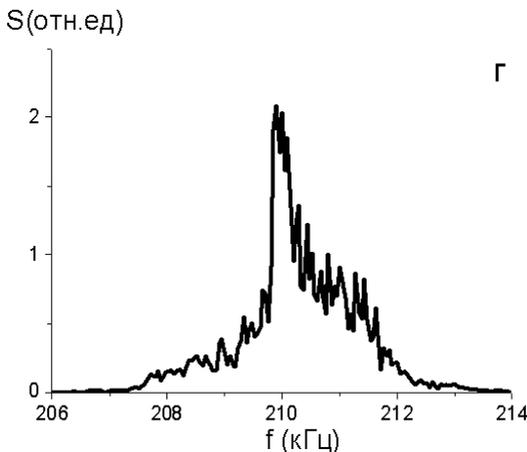


Рисунок 4. Спектры интенсивности одной из волн в окрестности частоты автомодуляционных колебаний при периодической модуляции накачки с частотой $f_p = 420$ кГц и глубиной модуляции $h = 0.27$: (а) в отсутствие шумовой модуляции накачки ($D = 0$) и при наличии шумовой модуляции $D = 0.05$ (б), $D = 0.5$ (в), $D = 1$ (г)

ВЫВОДЫ

Исследовано влияние шума на синхронизацию порядка $1/2$ автомодуляционных колебаний излучения ТКЛ периодическим сигналом, модулирующим мощность излучения накачки.

Установлено, что при малых интенсивностях шумовой модуляции накачки шум способствует вынужденной синхронизации автоколебаний периодическим сигналом: в отсутствие внешнего шума синхронизация может отсутствовать, а при добавлении достаточно слабого шума происходит стохастическое возбуждение синхронизации порядка $1/2$. При последующем увеличении интенсивности шума синхронизация постепенно пропадает.

При вынужденной синхронизации автомодуляционных колебаний порядка $1/2$ имеет место бистабильность.

Если синхронизация еще не возникла, имеет место квазипериодический режим, в котором основными спектральными компонентами являются частота колебаний и частота модуляции накачки.

Если переход в режим синхронизации происходит из квазипериодического режима, то для возникновения синхронизации требуется достаточно большая амплитуда модуляции накачки.

Если же идти в обратном направлении из режима синхронизации и уменьшать глубину модуляции накачки, то синхронизация порядка $1/2$ будет наблюдаться при меньших амплитудах (при $h_2 < h < h_1$).

Таким образом, между границами h_1 и h_2 существует область гистерезиса, в котором существует как квазипериодический режим, так и режим синхронизации. Найдена область, в которой наблюдается бистабильность.

Зависимость отношения сигнал/шум в процессе синхронизации автомодуляционных колебаний от интенсивности шума имеет вид, характерный для стохастического резонанса, т.е. при синхронизации автоколебаний под действием шума возникает стохастический резонанс.

Список литературы:

1. Аулова Т.В., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Чекина С.Н. Квазипериодический режим автомодуляционных колебаний с низкочастотной импульсной огибающей. — Квантовая электроника, 41, 13 (2011).
2. Бойко Д.Д., Кравцов Н.В. Влияние поляризационных свойств резонатора на зависимость частоты автомодуляции от параметров чип-лазера. — Квантовая электроника, 25, 880 (1998).
3. Золотоверх И.И., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Фирсов В.В., Чекина С.Н. Влияние различия поляризаций встречных волн на динамику твердотельных кольцевых лазеров. — Квантовая электроника, 37, 1011 (2007).
4. Золотоверх И.И., Клименко Д.Н., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. Влияние периодической модуляции потерь на динамику автомодуляционных колебаний в твердотельном кольцевом лазере. — Квантовая электроника, 23, № 7, 625 (1996).
5. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. Нелинейная динамика твердотельных кольцевых лазеров. — Квантовая Электроника, 36, № 3, (2006).
6. Кравцов Н.В., Пашинин П.П., Сидоров С.С. Захват частот автомодуляционных колебаний и гистерезис неавтономного двунаправленного кольцевого твердотельного лазера. — Квантовая электроника, 32, 562 (2002).
7. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Чекина С.Н. Стохастический резонанс на субгармонике периодического сигнала модуляции в твердотельном лазере. — Квантовая электроника, 43, 917 (2013).
8. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление (М. Техносфера, 2003).

9. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. Радио, 1961.
10. Стратонович Р.Л. Случайные процессы в динамических системах. М. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
11. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. / Berlin: Springer, 2009.
12. Kravtsov N.V., Lariontsev E.G., Pashinin P.P., Sidorov S.S., Firsov V.V. Frequency Locking of Self-Modulation Oscillations in a Ring Laser by an External Signal. *Laser Phys.*, 13, 305 (2003).
13. Jung P., Hanggi P. Amplification of Small Signals via Stochastic Resonance. *Phys. Rev. A*, 44, 8032 (1991).

2.2. ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК CDS К CDTE

Гусейналиев Мамед

*канд. физ.-мат. наук, Нахчыванское отделение НАН
Республика Азербайджана, г. Нахчывань
E-mail: mamedhuss@mail.ru*

INVESTIGATION OF TRANSFORMATION PROCESSES OF CDS THIN FILMS TO CDTE

Mammad Huseynaliyev

*candidate of Science,
Nakhchivan Branch of Azerbaijan National Academy of Sciences,
Republic of Azerbaijan, Nakhchivan*

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе были изучены трансформационные процессы тонких пленок сульфида кадмия к теллуриду кадмия с помощью ионного обмена из растворов электролитов. Показано, что обменные процессы охватывают очень небольшую толщину тонких пленок CdS. Это объясняется тем, что, тонкая пленка CdS покрывается тонким слоем теллура, чем затрудняется ионообменный процесс.

ABSTRACT

At present work was learned transformation processes of cadmium sulfide thin films to cadmium telluride by ion-exchange of electrolytes solutions. It was showed, that exchange processes covers a very small thickness of CdS thin films. It was supposed that, thin film covered with thin layer of tellurium make difficulties for ion-exchange processes.

Ключевые слова: химическое осаждение; тонкие пленки; CdS; CdTe; трансформация; ионообменные процессы; оптический спектр поглощения; ширина запрещенной зоны.

Keywords: chemical deposition; thin films; CdS; CdTe; transformation; ion-exchange processes; optical absorption spectrum; band gap.

Введение

Полупроводниковые соединения II—VI группы, такие как CdS и CdTe являются перспективными материалами для создания на их основе гетероперехода CdS/CdTe с целью использования их в солнечных элементах. В последнее время было предпринято много усилий, чтобы произвести наноразмерные материалы, потому что электрические и оптические свойства могут быть изменены с помощью химического контроля над размером, стехиометрией и расстоянием между частицами.

Эти материалы были синтезированы с помощью различных методов, включая пиролиза металлоорганических соединений, золь-гель синтеза и т. д. В последние годы наблюдается значительный интерес к использованию тонких пленок в солнечных элементах [3].

Теллурид кадмия р-типа проводимости является оптимальным материалом для создания высокоэффективных пленочных солнечных элементов наземного применения. Его ширина запрещенной зоны, составляющая ~1,5 эВ, хорошо соответствует максимуму спектра солнечного излучения. Это соединение характеризуется также высоким коэффициентом поглощения. Максимальная экспериментальная эффективность более 15,8 % [1] зарегистрирована для малой площади солнечного элемента на основе гетеросистем CdS/CdTe а эффективность в промышленных масштабах составляла КПД > 10 % [5].

В тонких пленках CdS, полученных химическим осаждением наблюдается высокая фотопроводимость [6]. Тем не менее, производительность и воспроизводимость солнечного элемента на основе CdTe были ограничены обычной конструкцией устройства SnO₂/CdS/CdTe, которая используется более чем 30 лет.

Получение тонких пленок CdTe методом химического осаждения остается проблемной задачей до сих пор. Можно встретить статьи некоторых исследователей о выращивании тонких пленок CdTe методом химического осаждения. Но, во всех этих работах технология получения тонкой пленки не полностью описывается или в этих объяснениях большое количество непонятных моментов [2].

Но можно подойти к проблеме производства тонкой пленки CdTe с другой стороны. Прежде всего, как было сказано выше, CdTe является материалом солнечного элемента и наиболее подходящий

вариант для этого соединения является использование его в гетеро-структуре с CdS. Известно также, что решающим шагом в подготовке солнечной ячейки на основе CdS/CdTe является осаждение слоя CdTe толщиной 1,5—6 мкм.

В предлагаемом нами методе процесс непосредственного выращивания слоя CdTe исключается, а получение этого слоя над тонкой пленкой CdS осуществляется с помощью преобразования определенной толщины открытой поверхности тонкой пленки CdS к CdTe. Трансформация CdS в CdTe может открыть большие перспективы в направлении производства солнечных батарей на основе CdS /CdTe.

Каждая технологическая инновация позволяет выявить новые качества соединений. Производство тонкой пленки, мелкого порошка CdTe, и гетероперехода CdS/CdTe этим методом обуславливает открытие новых уникальных особенностей этого соединения и солнечных элементов, полученных впоследствии.

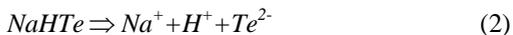
В этой работе изучаются процессы трансформации тонких пленок CdS, полученных методом химического осаждения к CdTe путем ионного обмена из растворов электролитов, состоящих из ионов двухвалентного теллура.

Материалы и методы

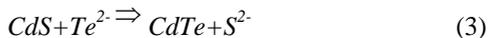
Для проведения процесса ионного обмена готовится водный электролитический раствор, состоящий из ионов двухвалентного теллура. После растворения боргидрида натрия (NaBH_4) в дистиллированной воде мелкий порошок металлического теллура посыпают в дополнение к полученному раствору. В результате идет следующая реакция:



В результате диссоциации NaHTe в растворе генерируются ионы двухвалентного теллура:



Ионный обмен происходит после погружения тонкой пленки CdS к полученному электролитическому раствору, ионы теллура замещают ионы серы с открытой поверхности тонкой пленки CdS:



В результате этой реакции ионы серы переходят в раствор. В открытой поверхности тонкой пленки CdS очень малая толщина слоя трансформируется к CdTe. Со стороны открытой поверхности желтый цвет тонкой пленки CdS получает коричневую окраску.

Проведенные исследования показали, что реализация процесса трансформации возможна только для очень небольшого слоя с определенной толщиной тонкой пленки CdS. Если тонкая пленка CdS подверглась преобразованию один раз, то следующим погружением ее в рабочий электролитический раствор никаких изменений не происходит.

Результаты и обсуждение

На рисунке 1. показан оптический спектр поглощения тонкой пленки CdS до и после трансформационного процесса.

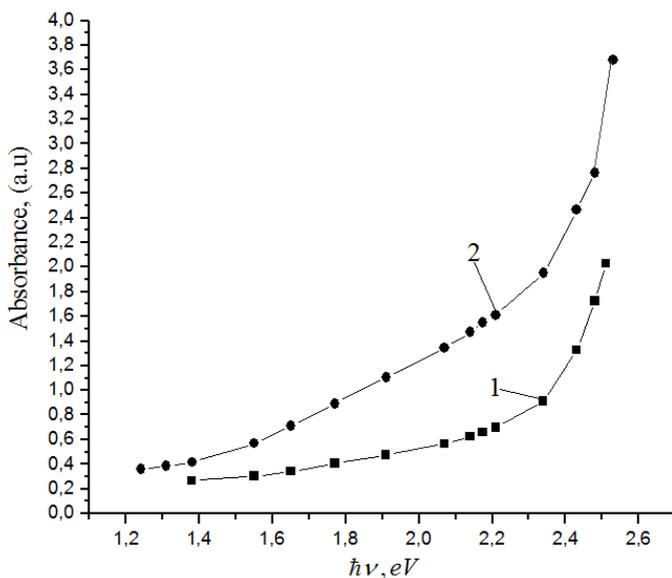


Рисунок 1. Оптический спектр поглощения тонкой пленки CdS до (1) и после (2) трансформационного процесса

Как показано на рисунке 1, значения оптического поглощения тонкой пленки CdS после трансформационного процесса (2) при любом значении энергии больше чем до преобразования (1).

Как известно [6], кристаллы тонкой пленки CdS имеют прямые, разрешенные оптические переходы вблизи края фундаментального

поглощения. В этом случае для спектральной зависимости коэффициента поглощения используется формула:

$$(\alpha \hbar \nu)^2 = A(\hbar \nu - E_g) \quad (4)$$

где A постоянная, а E_g ширина запрещенной зоны полупроводника. Построение кривой $(\alpha \hbar \nu)^2$ от $\hbar \nu$ в соответствии с формулой, дается на рисунке 2. Экстраполяция линейного участка функции $(\alpha \hbar \nu)^2$ к оси энергии позволяет найти значение оптической ширины запрещенной зоны E_g , которая в этом случае определяется длиной отрезка отсекаемого на оси энергии $\hbar \nu$. Полученные таким образом значения E_g для тонких пленок CdS до и после трансформационного процесса соответственно были равны 2,42 эВ и 2,26 эВ.

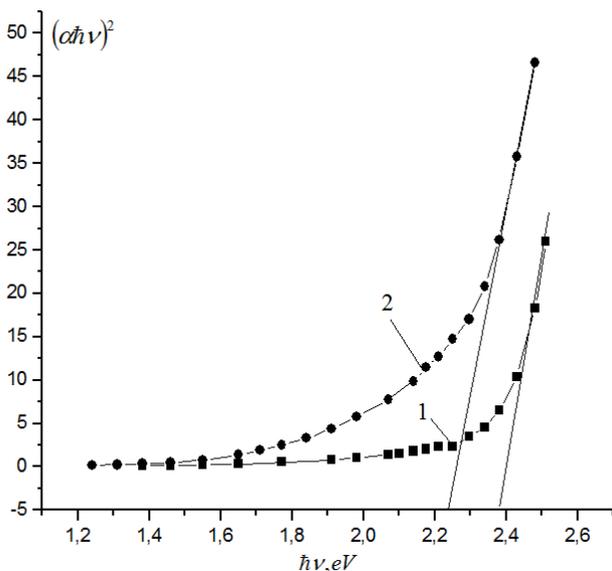


Рисунок 2. Зависимости $(\alpha \hbar \nu)^2$ от $(\hbar \nu)$ тонких пленок CdS до (1) и после (2) трансформационного процесса

Такое изменение ширины запрещенной зоны E_g соответствует направлению преобразования от CdS ($E_g = 2,42$ эВ) до CdTe ($E_g = 1,5$ эВ).

Для тщательного изучения процесса трансформации мелкий порошок CdS, который осаждается из раствора в процессе химического осаждения, был погружен в рабочий электролитический раствор, состоящий из ионов двухвалентного теллура. Вскоре темно-желтый порошок CdS обратился в металлический черный цвет.

Можно предположить, что размеры тонкого порошка CdS позволили бы полностью осуществить процесс трансформации. Но рентгенодифракционный анализ порошка черного цвета, заведомо полностью считаемый как CdTe, после трансформации CdS к CdTe показал, что дифракционная картина в основном соответствует кристаллам CdS. Полученные результаты могут быть объяснены следующим образом: NaHTe — слабая соль и поэтому очень быстро подвергается гидролизу. В результате гидролиза свободный теллур разлагается и выпадает в виде осадка на тонкую пленку CdS или на частицы тонкого порошка CdS. Это покрытие затрудняет ионообменный процесс. В результате процесс трансформации осуществляется только в очень тонком слое.

Заключение

Тонкие пленки CdTe были получены с использованием тонких пленок CdS в качестве первоначального материала методом трансформации.

Из спектра оптического поглощения определена ширина запрещенной зоны тонкой пленки CdS, равная $E_g=2,42$ эВ, которая уменьшается до $E_g=2,26$ эВ после процесса трансформации.

Показано, что тонкая пленка CdS покрываемая тонким слоем теллура затрудняет ионообменный процесс и трансформация охватывает очень небольшую толщину тонких пленок CdS.

Список литературы:

1. Britt J., C. Ferekides, “Thin-film CdS/CdTe solar cell with 15,8 % efficiency”, Applied Physics Letters, — vol. 62, — pp. 2851—2852, — 1993.
2. Deivanayaki S., et.al. “Optical and structural characterization of CdTe thin films by chemical bath deposition technique”, Chalcogenide Letters, — vol. 7, — pp. 159—163, — 2010.
3. Lin H., W. Xia, H.N. Wu, C.W. Tang, “CdS/CdTe Solar Cells with MoO_x as Back Contact Buffers”, Appl.Phys. Lett. 97, 123504, 2010, [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3489414>.
4. Pelant I., J. Valenta “Luminescence Spectroscopy of semiconductors” Oxford University Press, Inc., New York, 2012.
5. Ullal H.S. et.al., Proc. 28th IEEE. PVSC, pp. 418—423, 2000.
6. Valiyev Z.A., M.H. Huseynaliyev, “High photoconductivity in CdS thin films deposited by chemical bath deposition”, Journal of Physics (Fizika), Vol. IX, № 2, pp. 58—59, Institute of Physics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan, 2003.

2.3. ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, В ТОМ ЧИСЛЕ ФИЗИКА ГОРЕНИЯ И ВЗРЫВА

МЕТОДИКА ИНТЕГРАЦИИ И УЧЕТА МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ХИМИИ

Шевченко Светлана Сергеевна

*канд. физ-мат. наук, доцент
Череповецкого высшего военного училища радиоэлектроники,
РФ, г. Череповец*

Шайдулина Гульнара Хайдаровна

*ст. преподаватель
Череповецкого высшего военного училища радиоэлектроники,
РФ, г. Череповец*

Нилова Людмила Ивановна

*доцент Череповецкого высшего военного училища радиоэлектроники,
РФ, г. Череповец
E-mail: sveta-shev@yandex.ru*

METHODOLOGY OF INTEGRATION AND CONSIDERATION OF INTERSUBJECT COMMUNICATIONS WHEN TEACHING SOME SECTIONS OF QUANTUM PHYSICS AND CHEMISTRY

Svetlana Shevchenko

*candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Cherepovets Higher Military School of Radio Electronics,
Russia, Cherepovets*

Gulnara Shaydulina

*senior Lecturer,
Cherepovets Higher Military School of Radio Electronics,
Russia, Cherepovets*

Ludmila Nilova

*associate Professor,
Cherepovets Higher Military School of Radio Electronics,
Russia, Cherepovets*

АННОТАЦИЯ

В работе предлагается методика построения интегрированного курса на стыке физики и химии с целью более глубокого, детального и качественного изучения в высших технических учебных заведениях квантово-механического описания строения и свойств атомов и молекул и теории химической связи.

ABSTRACT

In the article a methodology of the integrated course formation at the intersection of physics and chemistry is offered for the purpose of deeper, more detailed and qualitative study of quantum-mechanical description of the structure and properties of atoms and molecules and chemical bond theory in higher technical schools.

Ключевые слова: уравнение Шредингера; строение атома; правила отбора; теория химической связи.

Keywords: Schrodinger equation; atomic structure; sample procedure; theory of chemical bond.

В настоящее время в рамках перехода от традиционной к компетентностной системе обучения на первый план выходит проблема

межпредметных связей преподаваемых дисциплин. Проблема эта не новая для высшей школы, но когда результатом обучения должна являться сформированность на должном уровне у обучаемого определенных компетенций, она приобретает совершенно новый качественный характер. Формирование компетенций априори должно происходить в рамках нескольких изучаемых дисциплин, и в этой связи межпредметное взаимодействие является основополагающим. Кроме того в условиях временных ограничений, накладываемых на дисциплины естественного цикла, на первый план выходит задача обеспечения высокой связности содержания естественнонаучных дисциплин, что, безусловно, влияет на эффективность обучения.

Межпредметная интеграция в учебном процессе позволяет обеспечить системность знаний, выработать целостное мировоззрение, единый взгляд на учебную и профессиональную деятельность, способствует формированию у обучаемых умения устанавливать всесторонние связи между научными фактами, понятиями, законами, теориями из различных областей естественнонаучных знаний.

В педагогической литературе имеется более сорока определений понятия «межпредметные связи», существуют различные классификации и самые разнообразные подходы к их педагогической оценке. Наиболее полным определением межпредметных связей в учебном процессе, на наш взгляд, представляется определение, данное Г.Ф. Федорцом: «межпредметные связи есть педагогическая категория для обозначения синтезирующих, интегративных отношений между объектами, явлениями и процессами реальной действительности, нашедших свое отражение в содержании, формах и методах учебно-воспитательного процесса и выполняющих образовательную, развивающую и воспитывающую функции в их органическом единстве» [2].

В данной работе предлагается достаточно эффективная методика интеграции и углубления межпредметных связей на стыке химии и квантовой механики, которая может быть применена для любой технической специальности высших учебных заведений. При традиционном подходе оба предмета изучаются «в параллельных плоскостях», нередко в разных семестрах, абсолютно не пересекаясь, что негативно сказывается на восприятии и так достаточно сложного материала студентами, и, как следствие, на выходе мы получаем низкий уровень освоения таких разделов, как принцип неопределенности, уравнение Шредингера, правила отбора, строение атомов и молекул, теория химической связи. Мы предлагаем построить учебный и календарный планы проведения занятий так, чтобы данные разделы физики и химии преподавались параллельно, а в некоторых

случаях целесообразно проводить интегрированные занятия двумя преподавателями.

Рассмотрим более подробно, как нужно для этого видоизменить содержательную часть стандартных курсов общей физики и общей химии в той их части, которая касается квантовой механики, строения и свойств атомов и молекул.

Итак, в основе современного учения о природе и свойствах химической связи лежит квантовая механика, которая в свою очередь базируется на принципе неопределенности, уравнении Шредингера и следствиях из него.

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

где: \hat{H} — оператор Гамильтона,

E — полная энергия электрона в заданном силовом поле (стационарном или нестационарном);

ψ — волновая функция электрона, определяющая волновой характер его движения и являющаяся основной характеристикой квантово-механического описания движения электрона.

Решение данного уравнения заключается в нахождении волновой функции, отражающей наиболее вероятное или стационарное состояние системы. На данном этапе предлагается сначала в курсе физики ввести основы квантово-механического описания поведения частиц, содержащие принцип неопределенности Гейзенберга, физический смысл волновой функции, простейшие случаи решения уравнения Шредингера, и сразу же параллельно перейти к теории химической связи. Остановимся более подробно на самых важных аспектах этой теории.

В физическом смысле нет разницы между атомом и молекулой. Нет особых сил химического взаимодействия. Природа химической связи — едина. Химическая связь образуется в результате электростатического притяжения противоположно заряженных ядер и электронов атомов, перекрывания атомных электронных облаков и действия квантовомеханических эффектов интерференции волновых функций, электронной делокализации и обмена [1].

Вследствие того, что для межатомных и межмолекулярных взаимодействий характерен довольно широкий диапазон энергий (1—1100 кДж/моль), их принято делить по типам химических связей, среди которых различают ковалентные, ионные, металлические, водородные и т. д. связи. Однако такая классификация носит прибли-

женный характер, и ее обоснование является весьма важным при изучении химии.

Не существует точного решения уравнения Шредингера для системы из трех частиц, поэтому для расчетов сложных атомов и молекул вводятся упрощающие предположения.

Из всех существующих на данный момент способов приближенного решения уравнения Шредингера и разработанных на их основе методов для описания химической связи, целесообразно рассмотреть два взаимодополняющих метода: валентных связей (МВС) и молекулярных орбиталей (ММО).

В методе ВС волновая функция молекулы составляется из волновых функций атомов, составляющих эту молекулу. Суть метода заключается в следующем: при образовании молекулы атомы в значительной степени сохраняют свою электронную конфигурацию (электроны внутренних оболочек), а силы связывания между атомами обусловлены обменом электронов внешних оболочек в результате спаривания спинов.

Для лучшего соответствия опытным данным в метод ВС вводят допущения об участии в химической связи атомов в возбужденном состоянии и о гибридизации атомных орбиталей (АО). При этом необходимо учитывать, что реальная гибридизация как механизм, а не как модель, проявляется только у элементов второго периода.

В методе МО полная волновая функция молекулы строится из волновых функций, описывающих поведение отдельных электронов в поле действия всех ядер и остальных электронов атомов, образующих молекулу. Таким образом, концепция МО близка к концепции АО. Разница лишь в том, что МО являются многоцентровыми. Поэтому молекулярные орбитали, как и атомные можно характеризовать тремя квантовыми числами, определяющими их энергию, число и ориентацию в пространстве. Электроны заполняют МО в соответствии с теми же принципами, что и атомные: принцип Паули, принцип минимальной энергии, правило Гунда.

Имеются различные варианты метода МО. В частности, метод линейной комбинации атомных орбиталей, сущность которого заключается в том, что молекулярную орбиталь можно представить как результат сложения и вычитания волновых функций электронов исходных АО. В случае одинакового знака амплитуд ψ двух электронов происходит сложение (связывающая МО), при разном знаке амплитуд — вычитание (разрыхляющая МО).

При сложении волновых функций электронов исходных АО в пространстве между ядрами возрастает значение молекулярной

волновой функции. Это означает, что при образовании МО плотность электронного облака в межъядерном пространстве увеличивается. В итоге происходит существенное понижение энергии электрона в поле двух ядер молекулы по сравнению с энергией электрона в атоме. Возникает химическая связь.

Разрыхляющая молекулярная орбиталь характеризуется уменьшением абсолютной величины волновой функции в межъядерном пространстве по сравнению с ее значением в исходных атомах. Вследствие уменьшения плотности электронного облака в пространстве между атомами, возникают силы, приводящие к взаимному отталкиванию ядер. В этом случае химическая связь не образуется.

До того, как в процессе изучения курса химии начнут раскрываться эти понятия, предлагаем провести интегрированную лекцию, посвященную квантово-механической базе таблицы Менделеева, правилам отбора и заполнения электронных оболочек. Содержание этой лекции должно быть проработано и подготовлено совместно преподавателями физики и химии и логичным продолжением ее является комплекс интегрированных семинаров, лабораторных работ и практических занятий, который завершится выполнением комплексного интегрированного проекта «Квантово-механическое обоснование теории химической связи и строения атомов и молекул».

Предлагаемая в данной работе методика апробирована на кафедре физики Череповецкого высшего военного инженерного училища радиоэлектроники. Результаты итогового тестирования курсантов показали, что в целом такая интеграция физики и химии при изучении данного раздела имеет ряд существенных плюсов и может быть рекомендована всем техническим специальностям.

Список литературы:

1. Коровин Н.В. Общая химия. М.: Высшая школа, 2003. — 559 с.
2. Сняжков А.П. Дидактические подходы к определению понятия «межпредметные связи» // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. — 2009. — № 113. — с. 197—202.

СЕКЦИЯ 3.

БИОЛОГИЯ

3.1. БИОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

О КАЧЕСТВЕ ЭФИРНОГО МАСЛА ПОЛЫНИ ТАВРИЧЕСКОЙ (КРЫМСКОЙ)

Тимашева Лидия Алексеевна

*канд. с.-х. наук, старший научный сотрудник, заведующая
лабораторией государственного бюджетного учреждения
Республики Крым*

*«Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма»,
РФ, г. Симферополь*

E-mail: isocrimea@gmail.ru

Пехова Ольга Антоновна

*канд. с.-х. наук, ведущий научный сотрудник государственного
бюджетного учреждения Республики Крым*

*«Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма»,
РФ, г. Симферополь*

E-mail: isocrimea@gmail.ru

Данилова Ирина Львовна

*научный сотрудник государственного бюджетного учреждения
Республики Крым*

*«Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма»,
РФ, г. Симферополь*

E-mail: isocrimea@gmail.ru

ABOUT THE QUALITY OF TAURIDE WORNWOOD OIL (CRIMEAN)

Lidia Timasheva

*master of Agriculture, Senior Research Scientist, Head of Laboratory,
State Budget Institution of Republic of Crimea
“Research Institute of Agriculture of the Crimea”,
Russia, Simferopol*

Olga Pehova

*master of Agriculture, Senior Research Scientist, State Budget Institution
of Republic of Crimea “Research Institute of Agriculture of the Crimea”,
Russia, Simferopol*

Irina Danilova

*research Scientist, State Budget Institution of Republic of Crimea
“Research Institute of Agriculture of the Crimea”,
Russia, Simferopol*

АННОТАЦИЯ

В статье приведены результаты лабораторных исследований по изучению качества эфирного масла полыни таврической (крымской). Нами определен компонентный состав эфирного масла полыни таврической полученного предприятиями Крыма. Установлено, что различные условия хранения не оказали существенного влияния на качество эфирного масла полыни таврической хранившегося в течение двух лет по сравнению с контролем (согласно ГОСТ 9063).

ABSTRACT

In the article the results of laboratory research on the study of quality of tauride wornwood oil (Crimean) are given. The authors identify a blend composition of tauride wornwood oil extracted by Crimean enterprises. It is set that different terms of storage have not influenced quality of tauride wornwood oil stored during two years as compared to control substantially (according to GOST 9063).

Ключевые слова: эфирное масло; качество; полынь таврическая; варианты хранения; показатели качества; компонентный состав.

Keywords: essential oil; quality; tauride wornwood; storage options; quality indicators; blend composition.

Введение

Полынь таврическая по своим хозяйственно-ценным признакам и адаптивности к почвенно-климатическим условиям является одним из наиболее перспективных растений Крыма. Род полыни насчитывает более 400 видов, распространенных в Европе, Азии, Африке и Северной Америке. В Российской Федерации насчитывается более 180 видов, а в Крыму — 17, из них наиболее часто встречаются следующие: полынь однолетняя (*Artemisia annua* L.), полынь обыкновенная (*Artemisia vulgaris* L.), полынь таврическая (*Artemisia taurica* Willd.), полынь эстрагонная (*Artemisia dracunculus* L.), полынь метельчатая (*Artemisia scoparia* W.K.) и другие виды), имеющие различный химический состав эфирного масла и являющиеся дикорастущими растениями. Промышленное значение в Крыму имеет только полынь таврическая. В диком виде полынь произрастает на глинистых солонцеватых почвах степных участков, а также по всему морскому побережью степного Крыма. Уже многие годы и в настоящее время дикорастущие растения полыни таврической остаются основным источником сырья для эфиромасличного производства. С созданием селекционных сортов и разработкой технологии выращивания растений появилась возможность увеличить производство эфирного масла полыни таврической.

Эфирное масло полыни таврической получают способом паровой дистилляции из надземной части многолетних растений (*Artemisia taurica* Willd), семейства астровых (*Asteraceae* L.). Нашими исследованиями было установлено, что накопление эфирного масла начинается уже в фазу всходов или отрастания для растений второго и последующих лет жизни, достигая своего максимума в период начала цветения - массовое цветение [1].

Эфирное масло, представляет собой легко подвижную прозрачную жидкость светло-желтого цвета, имеющую приятный, но резкий специфический травяной запах. Основным компонентом эфирного масла полыни таврической является туйон (сумма туйонов α и β) — от 65 % до 90 %.

Эфирное масло полыни таврической характеризуется широким спектром воздействия на организм человека и применяется в народной медицине. А также в виноделии и ликероводочном производстве; в парфюмерно-косметическом производстве — при изготовлении духов, одеколонов, лосьонов, а также для отдушки мыла, зубных порошков и других гигиенических средств. В быту эфирное масло полыни таврической используют для ароматизации помещений, но в дозах не более 0,1—0,5 мг на 1 м³ (что соответствует ее природной

концентрации). Эфирное масло применяют против блох и устранения неприятных запахов домашних животных.

Из практики известно, что все натуральные продукты, в том числе, эфирные масла, теряют со временем свое качество и становятся опасными для здоровья и жизни человека. Научными исследованиями установлено, что эфирные масла со временем подвергаются окислению. При хранении эфирных масел в неблагоприятных условиях окислительные процессы протекают с повышенной скоростью и в маслах накапливаются такие вещества, как альдегиды, кетоны, низкомолекулярные кислоты и др., снижающие их первоначальное качество. Изучению вопросов окисления эфирных масел (кориандровое, лавандовое, мятное, гераниевое, укропное и др.) было посвящено целый ряд научных работ: Лукьянов И.А., Берестовая М.М.; Георгиев Е. и Генов Н.; Танасиенко Ф.С., Кравец Т.И., Касимовская Н.Н.; Харебова Л.Г., Бухбиндер А.А.; Кочетков Е.С., Терех Л.Н., Коновалова К.Н. [2; 9; 11—13].

Цель исследований: изучить качество эфирного масла полыни таврической и установить оптимальные условия хранения масла в течении 24 мес.

Объект и методы исследования

Исследования проводились в отделе переработки и стандартизации эфиромасличного сырья (ГБУ РК «НИИСХКрыма», г. Симферополь) в 2012—2014 гг.

Объект исследования — эфирное масло полыни таврической, полученное в условиях производства.

Качество эфирного масла определяли по общепринятым методикам (ГОСТ 14618.5 — ГОСТ 14618.11; ГОСТ 30143-94, ГОСТ 30145-94) [3—5].

Определение оптимальных условий и продолжительности хранения эфирного масла полыни таврической проводили по следующим вариантам:

1. исходное эфирное масло (контроль) — хранение в соответствии с рекомендациями ГОСТ 9063 [3];
2. хранение при пониженной температуре от 8 °С до 10 °С (холодильник);
3. хранение при отрицательной температуре от (-6) до (-10) °С (морозильная камера);
4. хранение «без доступа воздуха» (флакон укупорен и запарафинирован);
5. хранение под вакуумом.

Подготовка образцов заключалась в следующем: эфирное масло наливали по плечики во флаконы одинаковой вместимости, укупоривали корковыми пробками, обернутыми тонкой фольгой. Образцы вариантов 2 и 3 помещали в холодильник и морозильную камеру соответственно. Образец «под вакуумом» готовили следующим образом: флакон заполняли эфирным маслом до верха, ставили на поддон и помещали в термостат с температурой в камере 40 °С на 30 мин. Образец, не вынимая из термостата, закрывали пробкой и быстро парафинировали. При охлаждении до комнатной температуры между эфирным маслом и пробкой образовывался вакуум.

Продолжительность хранения образцов составляла 24 мес. Анализ образцов эфирного масла проводили через 12 мес. и 24 мес. хранения. При этом определяли органолептические, физико-химические, газохроматографические показатели (хроматограф Кристалл 2000 М), массовую долю хроматографируемой части эфирного масла. Массовую долю компонентов вычисляли, как по отношению к хроматографируемой части, так и по отношению к эфирному маслу.

Результаты и обсуждение

Эфирные масла, используемые парфюмерно-косметической, пищевой промышленности и в медицине, в основном, получают из эфиромасличного сырья классическими методами (паро и гидродистилляцией). В международной практике оценки качества эфирных масел применяют международные стандарты категории ISO. В этих стандартах установлены следующие показатели качества эфирных масел: органолептические (внешний вид, цвет, запах), физико-химические (относительная плотность, показатель преломления, угол вращения плоскости поляризации, кислотное число, эфирное число, растворимость) и газохроматографические (профиль).

Обязательно указывают способ получения, ботанический вид и орган растения, из которого получают эфирное масло, а также место произрастания растений (страна).

Нашими исследованиями установлено, что эфирное масло полыни таврической полученное способом паровой дистилляции различными товаропроизводителями Крыма, имеет следующий химический состав: α -пинен; камфен; сабинен; мирцен; α -терпинен; лимонен; 1,8-цинеол; γ -терпинен; p-цимен; тепинолен; α -туйон; β -туйон; камфора; линалоол; нераль; борнеол; гераниаль. Типичная хроматограмма эфирного масла полыни таврической представлена на рисунке 1.

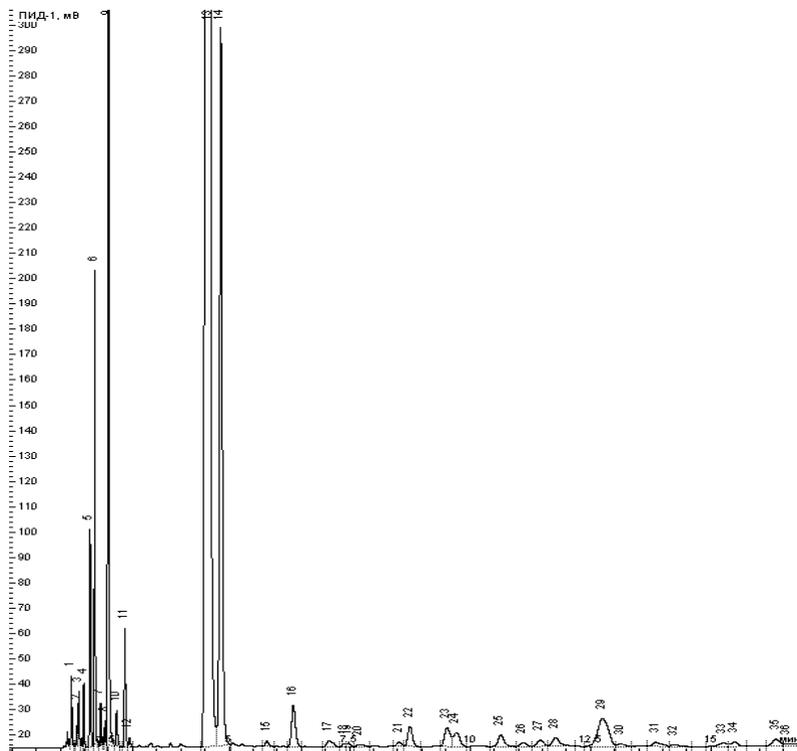


Рисунок 1. Типичная хроматограмма эфирного масла полыни тавайческой на капиллярной полярной колонке

Идентифицированные пики

- 3 α -пинен
- 4 камфен
- 5 сабинен
- 6 мирцен
- 9 1,8-цинеол
- 11 р-цимен
- 13 α -туйон
- 14 β -туйон
- 16 камфора
- 17 линалоол
- 28 нераль
- 32 гераниаль

Условия хроматографирования
Колонка капиллярная кварцевая, длина 40 м, внутренний диаметр 0,32 мм.
Неподвижная фаза: Карбовакс 20 М (полиэтиленгликоль 20000), толщина пленки 0,51 мкм.
Температура термостата программирования от 100 °С продолжительностью 5 мин, далее со скоростью 1,0 °С/мин до 144 °С.
Температура детектора: 200 °С.
Температура испарителя: 230 °С.
Детектор: пламенно-ионизационный.
Газ-носитель: азот.

Давление на входе в колонку 65 кПа, продолжительностью 5 мин, далее со скоростью 0,5 кПа в мин до 87,5 кПа. Деление потока 1/100. Объем пробы: $0,08 \cdot 10^{-3} \text{ см}^3$.

Хроматографический профиль эфирного масла полыни таврической представлен в таблице 1 в соответствии с требованиями ГОСТ ISO 11024-1 [8] на основании хроматографического анализа образцов эфирного масла полыни таврической, которое было произведено за последние 10 лет на эфиромасличных предприятиях Крыма. Полученные данные позволяют нам уточнить хроматографический профиль эфирного масла полыни таврической (крымской) представленный в ДСТУ 5055:2006 [9] и разработать национальный стандарт РФ на данный вид продукции.

Таблица 1.

Хроматографический профиль эфирного масла полыни таврической (крымской)

Название компонента	Минимум, %	Максимум, %
<i>α-пинен</i>	0	0,5
<i>β-пинен</i>	0	1,0
<i>камфен</i>	0	1,0
<i>сабинен</i>	0	0,5
<i>мирцен</i>	0,5	2,5
<i>1,8-цинеол</i>	1,5	9,0
<i>α-туйон</i>	60,0	85,0
<i>β-туйон</i>	5,0	10,0
<i>нераль</i>	0	0,7
<i>гераниаль</i>	0	0,7

Примечание. Профиль отражает количественную оценку репрезентативных и характерных компонентов в эфирном масле

Компонентный состав эфирных масел представлен самыми разнообразными классами органических соединений. Значительной частью этих соединений являются ненасыщенные соединения, которые очень чувствительны к окислению. При контакте с воздухом, при длительном хранении эфирных масел происходит окисление этих соединений и масла теряют свои первоначальные качества. Правильно подобранные условия хранения эфирных масел замедляют процессы автоокисления и способствуют сохранению их качества. Учитывая

разнообразии компонентного состава эфирных масел, логично предположить, что и условия их хранения могут быть различными.

В действующем межгосударственном стандарте на эфирные масла ГОСТ 31791 [7] продолжительность их хранения устанавливает изготовитель. Однако различные виды эфирных масел имеют различные сроки хранения.

В связи с этим для обоснования условий и продолжительности хранения эфирного масла полыни таврической нами были проведены исследования (таблица 2).

Таблица 2.

**Показатели качества эфирного масла полыни таврической
 в зависимости от продолжительности и условий хранения**

Показатель качества, продолжительность хранения, мес.	Контроль	Под вакуумом	Без доступа воздуха	Пониженная температура (8-10) °С	Отрицательная температура (-6 – -10) °С
Относительная плотность при 20 °С	Исходное 0,913				
12	0,919	0,916	0,917	0,921	0,918
24	0,946	0,917	0,918	0,921	0,918
Показатель преломления при 20 °С	Исходное 1,4538				
12	1,4565	1,4549	1,4550	1,4565	1,4550
24	1,4580	1,4555	1,4555	1,4560	1,4560
Угол вращения плоскости поляризации, градус при 20 °С	Исходное -9,90				
12	-9,89	-9,90	-9,70	-9,45	-9,80
24	-9,10	-9,30	-9,70	-9,10	-10,10
Кислотное число, мг КОН/ г	Исходное 1,52				
12	5,04	1,43	1,16	2,83	1,41
24	8,41	1,54	1,54	2,68	1,34
Растворимость в 80 % (v/v) этиловом спирте при 20 °С	Исходное 1: 0,75				
12	1:0,90	1: 0,40 ^{*)}	1:0,80	1: 0,90	1: 0,80
24	1:0,60	1: 0,40 ^{*)}	1:0,70 ^{*)}	1: 0,70	1: 0,80

Массовая доля суммы туйонов ^{**} , %	Исходное 89,04/ 87,74				
12	88,62/ 66,08	87,23/ 68,02	87,75/ 68,25	88,30/ 67,64	91,03/ 66,76
24	90,81/ 80,01	88,00/ 86,81	87,78/ 87,66	88,82/ 78,89	88,06/ 87,80
Хроматографируемая часть, %	Исходное 98,54				
12	74,57	77,98	77,78	76,61	73,34
24	88,11	98,65	99,87	98,87	99,80

Примечание. *) растворимость в 85 % (v/v) этиловом спирте;
 **) к хроматографируемой части / эфирному маслу

Полученные данные (таблица 2) по хранению эфирного масла полыни таврической показывают, что величина физико-химических показателей таких, как «относительная плотность», «угол вращения плоскости поляризации» и «кислотное число» (кроме вариантов «контроль» и «отрицательная температура») практически не изменялись. Растворимость эфирного масла полыни таврической в вариантах опыта «под вакуумом» и «без доступа воздуха» была определена в 85 % (v/v) этиловом спирте.

Хроматографируемая часть эфирного масла полыни таврической изменялась следующим образом: после 12 мес. хранения хроматографируемая часть снижалась на (20—25) % по всем вариантам опыта по сравнению с исходными данными. После 24 мес. хранения хроматографируемая часть уменьшилась в контроле на 10 % по сравнению с исходной величиной, а во всех остальных вариантах опыта она была на уровне исходной величины контроля.

По качеству исходное эфирное масло (контроль) полыни таврической после 24 мес. хранения стало нестандартным («кислотное число» увеличилось до 8,41 мг КОН/г), а эфирное масло, хранившееся в изучаемых вариантах опыта, оставалось стандартным, величины показателей качества были близкими к исходным. Однако, в варианте «пониженная температура» было выявлено увеличение «кислотного числа» (до 2,68—2,83 мг КОН/г) по сравнению с исходным показателем (1,52 мг КОН/г), но величина этого показателя не превысила норматива, указанного в стандарте (не более 3,0 мг КОН/г) [9].

Органолептические показатели качества эфирного масла полыни таврической по вариантам опыта за весь период хранения существенных изменений не претерпели.

Во всех вариантах опыта эфирное масло сохранило свой первоначальный запах и цвет.

Выводы

Для подтверждения подлинности и идентификации компонентного состава эфирного масла полыни таврической (крымской) необходимо применять метод газохроматографического анализа.

Установлено, что эфирное масло полыни таврической при различных условиях хранения в течении 24 мес. по сравнению с контролем по качеству оставалось практически неизменным.

Полученные данные позволяют нам уточнить хроматографический профиль эфирного масла полыни таврической (крымской) представленный в ДСТУ 5055:2006, уточнить условия и сроки хранения и разработать национальный стандарт РФ на данный вид продукции.

Список литературы:

1. Богатюк Н.П., Данилова Л.И., Тимашева Л.А. Особенности накопления эфирного масла полыни таврической (*Artemisia taurica* Willd.) в процессе онтогенеза // Состояние лесов Дальнего Востока и актуальные проблемы леса управления: материалы всероссийской конференции с международным участием. — Хабаровск: ФГУ «ДальНИИЛХ», 2009. — С. 111—113.
2. Георгиев Е., Генов Н. Об изменениях лавандового масла при его хранении // Трета национална конференция «Проблемы на козметичното и парфюмерийното производство». — Варна, 1978. — С. 17.
3. ГОСТ 9069-73 Масла эфирные, вещества душистые и полупродукты их синтеза, косметическое сырье. Упаковка, маркировка, транспортирование и хранение — М.: Издательство стандартов, 1974. — 5 с.
4. ГОСТ 14618.5-78. — ГОСТ 14618.11-78 Масла эфирные, вещества душистые и полупродукты их синтеза. Правила приемки и методы анализа. — М.: Изд-во стандартов, 1987. — С. 42—95.
5. ГОСТ 30143–94 Масла эфирные и продукты эфиромасличного производства. Метод определения кислотного числа. — Киев, Госстандарт Украины, 1994. — 10 с.
6. ГОСТ 30145-94 Масла эфирные и продукты эфиромасличного производства. Правила приемки, отбор проб и методы органолептических испытаний. — Киев, Госстандарт Украины, 1994. — 12 с.
7. ГОСТ 31791-2012 Продукция и сырье эфиромасличное травянистое и цветочное. Технические условия. — М. Стандартинформ, 2014. — 15 с.

8. ГОСТ ISO 11024-1-2014 Масла эфирные. Общее руководство по хроматографическим профилям. Часть 1. Подготовка хроматографических профилей для представления в стандартах. — М. Стандартинформ, 2015. — 12 с.
9. ДСТУ 5055:2006 Олія ефірна полину таврійського. Технічні умови. — Київ, Держспоживстандарт, 2009. — 12 с.
10. Кочетков Е.С., Коновалова К.Н., Терех Л.Н. Характер изменений, происходящих в эфирных маслах при их хранении. // Тр.НИИ эфиромасличных и лекарственных растений. — Симферополь, 1992. — Т. XXIII. — С. 105—112.
11. Лукьянов И.А. Берестовая М.М. Изменение кориандрового эфирного масла при хранении // Труды ВНИИЭМК. — Симферополь, — 1973. — Т. У1. — С. 170—173.
12. Танасиенко Ф.С., Кравец Т.И., Касимовская Н.Н. Об изменениях состава эфирного масла мяты перечной (*Mentha piperita* L.) при хранении в открытых сосудах // Труды ВНИИЭМК. — Симферополь, — 1977. — Т. X. — С. 33—38.
13. Харебова Л.Г., Бухбиндер А.А. Влияние длительного хранения на состав эфирного масла герани // Всесоюзное НПО по чаю и субтропическим культурам Госагропрома СССР. — Махарадзе, 1987. — 6 с.

3.2. МЕДИЦИНСКАЯ БИОЛОГИЯ

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ ЯИЧНИКОВ ПРИ СВИНЦОВОЙ ИНТОКСИКАЦИИ

Дуденкова Наталья Анатольевна

ассистент кафедры биологии, географии и методик обучения
ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический
институт им. М.Е. Евсевьева»,
РФ, г. Саранск

E-mail: natalya-dudenkova@yandex.ru

E-mail: dudenkova_nataly@mail.ru

Шубина Ольга Сергеевна

д-р биол. наук, профессор, зав. кафедрой биологии, географии
и методик обучения
ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический
институт им. М.Е. Евсевьева»,
РФ, г. Саранск

E-mail: o.shubina@mail.ru

Комарова Нина Анатольевна

канд. биол. наук, доцент кафедры теории и методики физической
культуры и спорта
ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический
институт им. М.Е. Евсевьева»,
РФ, г. Саранск

E-mail: ninasm@bk.ru

THE MORPHOLOGICAL FEATURES OF THE OVARIES DURING LEAD INTOXICATION

Natalia Dundekova

*assistant of the Department of biology, geography and teaching methods
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional
Education "Mordovian State Pedagogical Institute
named after M.E. Evseyev",
Russia, Saransk*

Olga Shubina

*doctor of biological Sciences, Professor, head of the Department of biology,
geography and methods of teaching
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional
Education "Mordovian State Pedagogical Institute
named after M.E. Evseyev",
Russia, Saransk*

Nina Komarova

*candidate of biological Sciences, assistant professor of the Department
of theory and methodology of physical culture and sports
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional
Education "Mordovian State Pedagogical Institute
named after M.E. Evseyev",
Russia, Saransk*

*Работа проводилась при финансовой поддержке Минобрнауки
РФ в рамках государственного задания ФГБОУ ВПО «Мордовский
государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева»
(проект «Влияние антропогенных факторов на морфофункциональное
состояние организма»).*

АННОТАЦИЯ

С помощью гистологических и морфометрических методов исследования изучали влияние ацетата свинца на яичники самок белых крыс в период постнатального онтогенеза. После проведенных исследований выявлено, что после 7 суток воздействия ацетата свинца происходит морфологическая перестройка коркового и мозгового вещества яичника. В корковом веществе ярко выражена атрезия вторичных фолликулов. Установлено, что атрезии чаще подвергались

вторичные фолликулы. Мозговое вещество содержит более крупные сосуды, что свидетельствует об усилении кровоснабжения яичников.

ABSTRACT

Using histological and morphometric methods of research studied the effect of lead acetate on the ovaries of females of white rats during postnatal ontogenesis. After research revealed that after 7 days of exposure of lead acetate occurs morphological restructuring of cortex and medulla of the ovary. In the cortex pronounced atresia of secondary follicles. Found that atresia was often subjected to secondary follicles. The medulla contains large blood vessels, which indicates an increase of blood supply to the ovaries.

Ключевые слова: яичники; однослойный эпителий; белочная оболочка; мозговое вещество яичника; корковое вещество яичника; фолликулярный аппарат; менструальное желтое тело; ацетат свинца.

Keywords: the ovaries; single-layered epithelium; protein shell; the medulla of the ovary; the cortical substance of the ovary; follicular apparatus; menstrual yellow body; lead acetate.

Введение.

Ухудшающаяся экологическая ситуация в настоящее время является одним из главных факторов нарушения репродуктивной функции человека и животных [6, с. 28]. Среди наиболее опасного антропогенного загрязнения окружающей среды, лидирующие позиции занимает свинец и его соединения [4, с. 128; 5, с. 29], экзогенное воздействие которого на репродуктивную систему организма является важным аспектом в прогнозировании и предупреждении патологии беременности и родов [7, с. 228]. В проведенных нами ранее исследованиях было детально описано влияние соединений свинца на мужскую репродуктивную систему, в том числе и на ее репродуктивную способность [2, с. 1258; 3, с. 55; 11, с. 230; 12, с. 1620]. Однако недостаточно сведений о влиянии свинцовой интоксикации на женскую репродуктивную систему, и в частности на яичники.

Целью работы явилось изучение влияния свинцовой интоксикации на морфологическую структуру яичников самок белых крыс.

Материал и методы исследования.

В качестве биологического тест-объекта в работе использовали самок белых беспородных половозрелых крыс массой 200—250 г. в возрасте от 60 суток, так как, согласно литературным данным, примерно в это время у крыс наступает период полового созревания [1, с. 23; 9, с. 163]. Всего использовано 50 животных.

Выбор белых крыс для проведения исследования обусловлен тем, что они обладают сходными с человеком строением женских половых желез, а также протеканием в них процесса фолликулогенеза.

Эксперимент проводился в течение года в помещении при температуре воздуха 22—25 °С и относительной влажности 67—70 %. Животные находились на общем режиме вивария, имели свободный доступ к корму и воде.

В соответствии с поставленными задачами животные разбивались на две группы. Контрольную группу животных составили самки крыс, содержащихся на общем режиме вивария. Опытную группу составили животные, получавшие в течение 7 суток перорально ацетат свинца $Pb(CH_3COO)_2 \times 3H_2O$ в среднетоксической дозе — 45 мг/кг/сутки (в пересчете на свинец).

Животные забивались путем декапитации под наркозом эфира с хлороформом (1:1) с соблюдением принципов гуманности, изложенных в директивах Европейского сообщества (86/609/ЕЕС) и Хельсинкской декларации, и в соответствии с требованиями правил проведения работ с использованием экспериментальных животных.

Для более точного исследования яичников самок белых крыс забивали в стадию диэструса, которая характеризуется как стадия активности желтого тела [10, с. 5].

Материалом исследования служили яичники половозрелых самок белых крыс. Для гистологического исследования образцы тканей половых желез фиксировали в 10%-ном растворе нейтрального формалина. Зафиксированные образцы после промывки в проточной воде подвергали обезвоживанию путем помещения исследуемого материала в спирты возрастающей концентрации. Заливали в парафин по общепринятой методике. Готовили гистологические поперечные срезы яичников толщиной 10—15 мкм, окрашивали их гематоксилином и эозином [8, с. 125]. Образцы тканей исследовали с помощью цифрового микроскопа Axio Imager.M2 (ZEISS, Япония) с программным обеспечением для анализа изображений AxioVision SE 64Rel. 4.8.3 и ZEN 2011.

При обзорной микроскопии проводили морфологический анализ структурных тканевых компонентов яичников крысы, после чего изучали следующие их морфометрические параметры: толщину однослойного эпителия, покрывающего яичник снаружи; толщину белочной оболочки яичника; площадь поперечного среза яичника; площадь и толщину коркового и мозгового вещества яичника; количество разных типов фолликулов и менструальных желтых тел

в корковом веществе яичника; толщину кровеносных сосудов, пронизывающих мозговое вещество яичника.

Морфометрические измерения яичников производили при увеличении 5×10 , 20×10 и 100×10 . Фотосъемку препаратов производили при помощи встроенной цифровой камеры AxioCam MRc5 (ZEISS, Япония).

Разрешение полученных изображений — 1300×1030 пикселей.

Статистическая обработка цифровых данных проводилась с помощью программ FStat и Excel. Проверка статистических гипотез осуществлялась по t-критерию Стьюдента.

Все наблюдаемые различия считали достоверными при уровне значимости $P\leq 0,05$.

Результаты исследования и их обсуждение.

Проведенные гистологические и морфометрические исследования позволили выявить состояние основных структур яичников белых крыс — фолликулов, менструальных желтых тел, а также кровеносных сосудов, как в контроле, так и в опыте.

В результате проведенных исследований показано, что контроле клетки покрывающего яичник снаружи однослойного эпителия имеют кубическую форму. Белочная оболочка имеет однородную структуру. Она слабо васкуляризирована (рис. 1). Хорошо различимы корковый и мозговой слой яичника (рис. 2).

В корковом веществе яичника фолликулы находятся на разных стадиях развития: от примордиальных и вплоть до зрелых третичных фолликулов. Примордиальные фолликулы располагаются в виде компактных групп непосредственно под белочной оболочкой яичника. Лишь изредка встречаются одиночные примордиальные фолликулы. Местами встречаются атретические фолликулы. Фолликулы в большинстве случаев имеют округлую форму (рис. 3). Между фолликулами располагается соединительнотканная строма яичника. Клетки соединительнотканной стромы коркового вещества яичника имеют веретенообразную форму (рис. 4).

После проведенных исследований выявлено, что в контроле менструальные желтые тела располагаются равномерно в корковом веществе яичника. Они покрыты соединительнотканной капсулой, от которой к центру направляются тонкие прослойки, содержащие кровеносные и лимфатические сосуды. Обнаруженные менструальные желтые тела имеют округлую или овальную форму. Большинство из них находятся в стадии образования или зрелости (рис. 5).

После проведенных исследований, было выявлено, что мозговое вещество яичника невелико по сравнению с корковым. Оно хорошо

васкуляризировано. Небольшие кровеносные сосуды проходят из мозгового вещества в корковое. Соединительнотканная основа мозгового вещества яичника не упорядочена (рис. б).

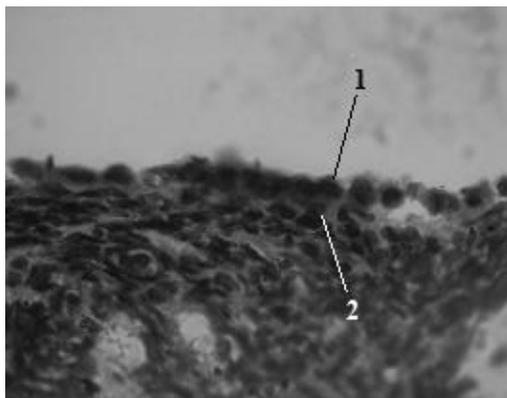


Рисунок 1. Поверхность яичника крысы (контроль). Об. 100 × ок. 10.
Окраска гематоксилин-эозин: 1 — однослойный эпителий;
2 — белочная оболочка

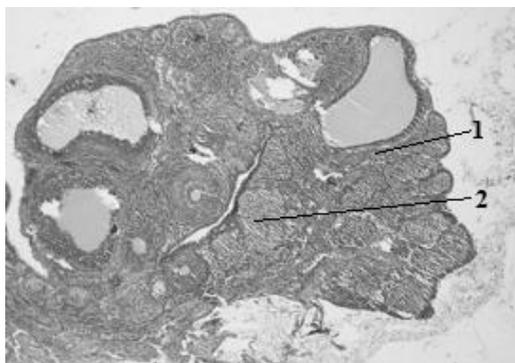
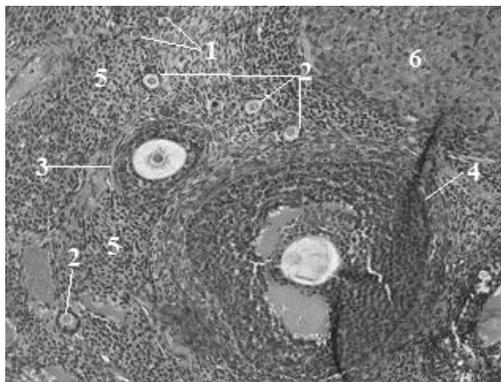
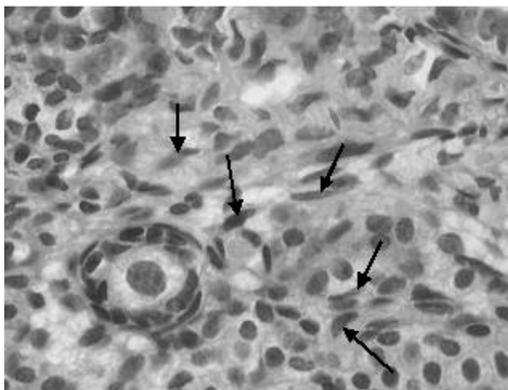


Рисунок 2. Поперечный срез яичника крысы (контроль).
Об. 5 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин: 1 — корковое вещество
яичника; 2 — мозговое вещество яичника



**Рисунок 3. Кортикное вещество яичника крысы (контроль).
Об. 20 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин: 1 — примордиальные
фолликулы; 2 — первичные фолликулы; 3 — вторичные фолликулы;
4 — третичные фолликулы; 5 — соединительнотканная основа;
6 — менструальное желтое тело**



**Рисунок 4. Клетки соединительно-тканной стромы яичника крысы
(контроль). Четко видно, что они имеют веретенообразную
форму. Об. 100 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин**

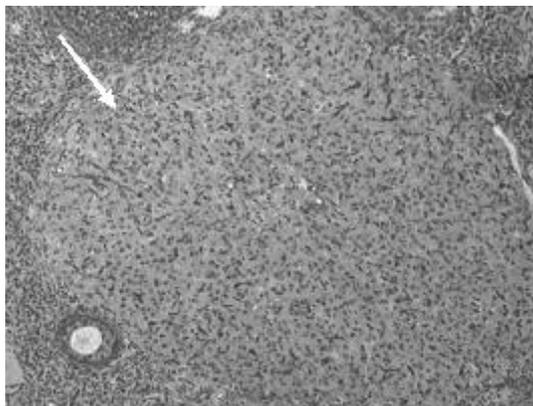
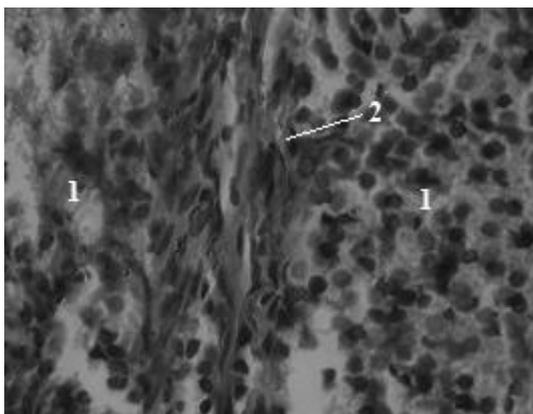


Рисунок 5. Менструальное жёлтое тело в корковом веществе яичника крысы (контроль). Об. $20 \times$ ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин



**Рисунок 6. Мозговое вещество яичника крысы (контроль). Об. $100 \times$ ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин:
1 — соединительнотканная основа; 2 — кровеносный сосуд**

В ходе проведенных исследований выявлено, что после 7 суток перорального воздействия ацетата свинца на организм самок белых крыс клетки однослойного эпителия, покрывающего яичник крысы снаружи, имеют более удлиненную форму. Белочная оболочка яичника крысы обладает более плотной структурой (рис. 7). Отмечается

увеличение объема мозгового вещества яичника крысы по отношению к корковому (рис. 8).

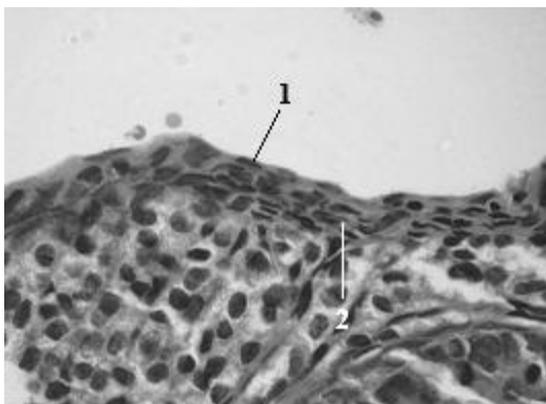


Рисунок 7. Поверхность яичника крысы (опыт). Об. 100 × ок. 10.
Окраска гематоксилин-эозин: 1 — однослойный эпителий;
2 — белочная оболочка

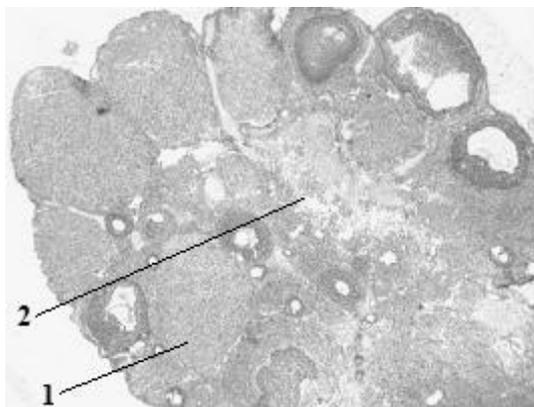
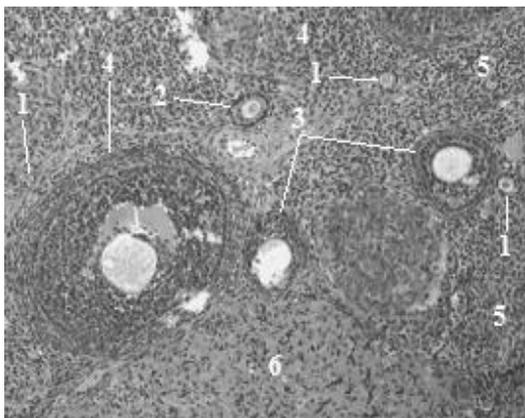


Рисунок 8. Поперечный срез яичника крысы (опыт).
Окраска гематоксилин-эозин. Об. 5 × ок. 10: 1 — корковое вещество
яичника; 2 — мозговое вещество яичника

Примордиальные фолликулы в корковом веществе яичника крысы располагаются преимущественно одиночно (рис. 9). Обращает на себя внимание высокое содержание атретических фолликулов.

Атрезии чаще подвергались вторичные растущие фолликулы, реже третичные фолликулы (рис. 10). Среди более зрелых форм фолликулов, часто встречаются фолликулы овальной и неправильной формы (рис. 11, 12).



**Рисунок 9. Коровое вещество яичника крысы (опыт).
Об. 20 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин: 1 — примордиальные фолликулы; 2 — первичные фолликулы; 3 — вторичные фолликулы; 4 — третичные фолликулы; 5 — соединительнотканная основа; 6 — менструальное желтое тело**

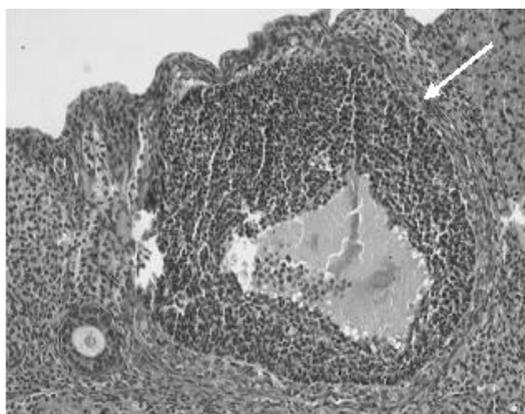


Рисунок 10. Атретический фолликул в корковом веществе яичника крысы (опыт). Об. 20 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин

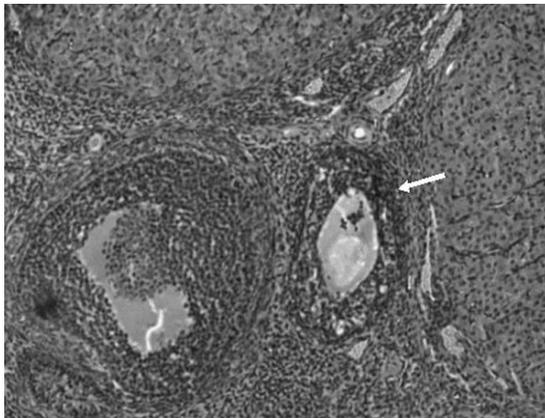


Рисунок 11. Вторичный фолликул в корковом веществе яичника крысы (опыт). Об. 20 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин

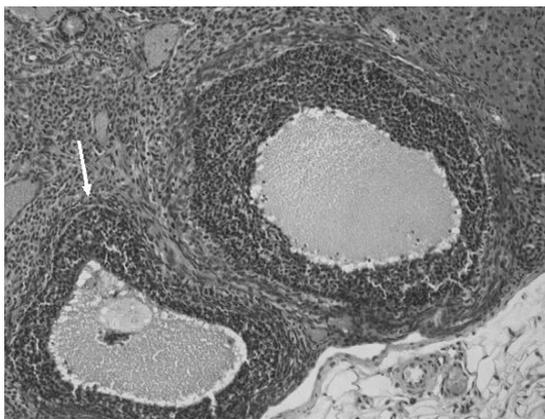


Рисунок 12. Третичный фолликул в корковом веществе яичника крысы (опыт). Об. 20 × ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин

Обнаруженные в корковом веществе яичника крысы менструальные желтые тела имели неправильную форму (рис. 13).

После 7 суток перорального воздействия ацетата свинца в мозговом веществе яичника крысы обнаружены более крупные сосуды, чем в контроле, что свидетельствует об усилении их кровоснабжения (рис. 14).

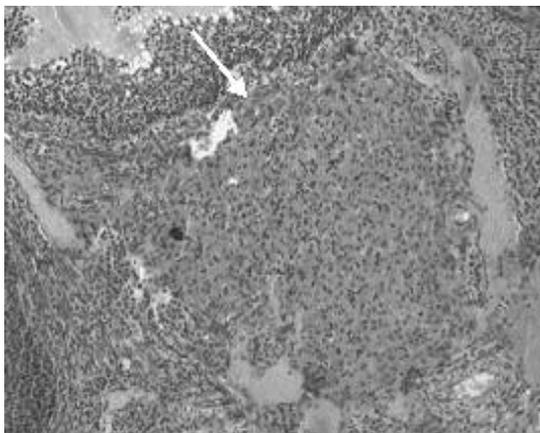
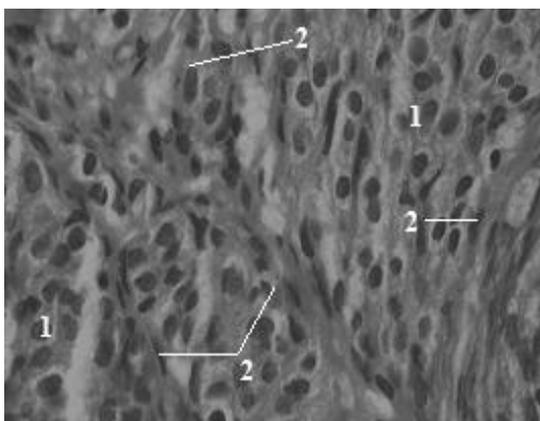


Рисунок 13. Менструальное жёлтое тело в корковом веществе яичника крысы (опыт). Об. $20 \times$ ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин



**Рисунок 14. Мозговое вещество яичника крысы (опыт). Об. $100 \times$ ок. 10. Окраска гематоксилин-эозин:
1 — соединительная основа; 2 — кровеносные сосуды**

Морфометрические исследования показали, что в опытной группе животных, по сравнению с контролем, происходит уменьшение толщины покрывающего яичник крысы снаружи однослойного эпителия, толщины белочной оболочки яичника крысы, толщины и площади коркового вещества яичника крысы соответственно

на 35,55 % ($P \leq 0,05$), 13,88 % ($P \leq 0,05$), 12,04 % ($P \leq 0,05$) и 6,18 %. В то же время наблюдалось увеличение площади поперечного среза яичника крысы, площади и толщины его мозгового вещества, а также толщины пронизывающих мозговое вещество яичника крысы кровеносных сосудов, соответственно на 2,85 %, 30,03 % ($P \leq 0,05$), 19,01 % ($P \leq 0,05$) и 34,02 % ($P \leq 0,05$) (табл. 1).

Количественный анализ фолликулярного аппарата яичников самок белых крыс показал, что в опытной группе животных, по сравнению с контролем, происходит снижение количества примордиальных, первичных, вторичных, третичных фолликулов и менстуральных желтых тел соответственно на 15,12 % ($P \leq 0,05$), 18,73 % ($P \leq 0,05$), 44,32 % ($P \leq 0,05$), 49,43 % ($P \leq 0,05$) и 45,30 % ($P \leq 0,05$). В то же время наблюдалось увеличение количества атретических фолликулов на 66,23 % ($P \leq 0,05$) (табл. 2).

Таблица 1.

Макроскопические показатели яичников самок белых крыс

№ п/п	Показатели	Контроль	Опыт
1	Толщина однослойного эпителия, покрывающего снаружи яичник крысы, мкм	10,07±0,48	6,49±0,24*
2	Толщина белочной оболочки яичника крысы, мкм	19,67±0,38	16,94±0,39*
3	Площадь поперечного среза яичника крысы, $\times 10^3$ мкм ²	9586,76±25,50	9868,51±28,27*
4	Площадь коркового вещества яичника крысы, $\times 10^3$ мкм ²	6912,15±23,79	6484,89±22,63*
5	Толщина коркового вещества яичника крысы, мкм	1538,98±18,73	1353,73±21,07*
6	Площадь мозгового вещества яичника крысы, $\times 10^3$ мкм ²	2176,05±24,84	3110,23±22,63*
7	Толщина мозгового вещества яичника крысы, мкм	799,43±3,79	987,09±5,92*
8	Толщина кровеносных сосудов, пронизывающих мозговое вещество яичника крысы, мкм	11,81±1,38	17,90±1,97*

Примечание: * — $P \leq 0,05$ по сравнению с контрольными животными

Таблица 2.

Количественные показатели структурных компонентов коркового вещества яичников самок белых крыс

№ п/п	Структурные компоненты коркового вещества яичников	Контроль	Опыт
1	Примордиальные фолликулы	17,72±1,31	15,04±0,78*
2	Первичные фолликулы	13,88±1,09	11,28±1,07*
3	Вторичные фолликулы	10,92±0,98	6,08±0,68*
4	Третичные фолликулы	7,04±0,77	3,56±0,63*
5	Атретические фолликулы	2,08±0,78	6,16±0,16*
6	Желтые тела	4,68±0,68	2,56±0,62*

*Примечание: * — $P \leq 0,05$ по сравнению с контрольными животными*

Выводы.

Воздействие ацетата свинца приводит к следующим морфологическим и морфометрическим изменениям яичников самок белых беспородных крыс:

1. уменьшается толщина покрывающего яичник крысы снаружи однослойного эпителия;
2. уменьшается толщина белочной оболочки яичника крысы;
3. уменьшается площадь и толщина коркового вещества яичника крысы, при одновременном увеличении площади и толщины мозгового вещества;
4. в корковом веществе яичника крысы уменьшается количество примордиальных, первичных, вторичных, третичных фолликулов и менструальных желтых тел, при одновременном увеличении количества атретических фолликулов;
5. увеличивается диаметра кровеносных сосудов, пронизывающих мозговое вещество яичника крысы.

Таким образом, анализ результатов проведенных исследований позволяет сделать вывод о том, что у самок белых крыс при свинцовой интоксикации отмечается морфологическая перестройка коркового и мозгового вещества яичника. Имеет место нарушение процесса фолликулогенеза, проявляющегося в снижении суммарного содержания фолликулов, изменением фолликулярного состава яичников и образования менструальных жёлтых тел. Мозговое вещество яичников крысы содержит более крупные кровеносные сосуды, что свидетельствует об усилении их кровоснабжения при свинцовой интоксикации.

Список литературы:

1. Бабичев В.Н. Нейроэндокринология пола. М.: Наука, 1981. — 222 с.
2. Дуденкова Н.А., Шубина О.С. Изменения морфофункционального состояния и продуктивности семенных желез белых крыс при воздействии ацетата свинца // *Фундаментальные исследования*. — 2013. — № 10. — С. 1253—1259.
3. Дуденкова Н.А., Шубина О.С. Цитологическая оценка репродуктивной способности семенников самцов белых крыс после воздействия ацетата свинца // *Современная биология: актуальные вопросы: матер. V Междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 13—14 февраля 2015 г.* СПб.: Научный фонд «Биолог», 2015. — С. 53—56.
4. Измеров Н.Ф. Свинец и здоровье. Гигиенический и медико-биологический мониторинг. М.: Медицина, 2010. — 256 с.
5. Корбакова А.И., Соркина Н.С., Молодкина Н.Н., Ермоленко А.Е., Веселовская К.А. Свинец и его действия на организм (обзор литературы) // *Медицина труда и промышленная экология*. — 2001. — № 5. — С. 29—34.
6. Паранько Н.М., Рублевская Н.И., Белицкая Э.Н., Головкова Т.А., Землякова Т.Д., Чуб Л.Е., Шматков Г.Г. Роль тяжелых металлов в возникновении репродуктивных нарушений // *Гигиена и санитария*. — 2002. — № 1. — С. 28—30.
7. Савельева Г.В., Федорова М.В., Клименко П.А., Сичинава Л.Г. Плацентарная недостаточность. М.: Медицина, 1991. — 270 с.
8. Семченко В.В. Гистологическая техника. Омск: Омская медицинская академия, 2006. — 285 с.
9. Шаляпина В.Г. Эндокринология репродукции. СПб.: Наука, 1991. — 192 с.
10. Шейко Л.Д. Влияние малых доз шестивалентного хрома на репродуктивную функцию мелких млекопитающих: Модельный эксперимент: автореф. дис. канд. биол. наук. — Екатеринбург, 1998. — 28 с.
11. Shubina O.S., Dudenkova N.A., Teltsov L.P. The effect of lead on the process of spermatogenesis in male albino rats // *Ciencia e Tecnica Vitivinicola*. — 2014. — Vol. 29. — № 8. — P. 225—233.
12. Shubina O.S., Dudenkova N.A. Effect of Lead Acetate on the Productivity of the Seminal Glands of Male Albino Rats // *Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences*. — 2015. — №6 (1). — P. 1616—1621.

СЕКЦИЯ 4.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

4.1. ОБЩЕСТВЕННАЯ ГЕОГРАФИЯ

ГАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ТУРИЗМ КАК ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ РОССИИ

Нехаева Наталья Евгеньевна

*канд. геогр. наук, доцент кафедры международного и регионального
туризма Мордовского государственного университета
им. Н.П. Огарёва,
РФ, г. Саранск
E-mail: nne@bk.ru*

Терехова Юлия Сергеевна

*аспирант кафедры международного и регионального туризма
Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва,
РФ, г. Саранск
E-mail: mkt2018@yandex.ru*

GASTRONOMIC TOURISM AS A PERSPECTIVE DIRECTION OF THE DEVELOPMENT IN REGIONS OF RUSSIA

Natalia Nekhaeva

*candidate of geographical science, associated professor
of International and Regional Tourism
Chair Mordovia State University named after N.P. Ogaryov,
Russia, Saransk*

Julia Terekhova

*post graduate student of International and Regional Tourism
Chair Mordovia State University named after N.P. Ogaryov,
Russia, Saransk*

АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются теоретические аспекты развития гастрономического туризма, который может стать основой для развития регионов России.

ABSTRACT

The article considers the theoretical aspects of the development of gastronomic tourism, which could become the basis for the development of regions of Russia.

Ключевые слова: туризм; гастрономический туризм; вид туризма; развитие регионов.

Keywords: tourism; culinary tourism; tourism; development of the regions.

Гастрономический туризм — новое направление развития мирового туризма, которое может являться одним из возможных направлений сохранения и развития экономики традиционного хозяйства, культурного наследия и фактором устойчивого развития территорий [3].

Цель гастрономических туров — познакомиться с особенностями кухни той или иной страны. При этом данная цель не сводится к тому, чтобы попробовать какое-то редкое, экзотическое блюдо или перепробовать бесчисленное количество продуктов. Важно узнать особенности местной рецептуры, которая веками вбирала в себя традиции и обычаи местных жителей, их культуру приготовления

пищи. Гастрономическое путешествие называют «палитрой, с помощью которой турист может нарисовать свое представление о той или иной стране. Еда приоткрывает тайну духа народа, помогает понять его менталитет» [1].

Итак, гастрономический туризм — это поездка для ознакомления с особенностями национальной кухни страны, кулинарными традициями, особенностями производства и приготовления продуктов и блюд, а также обучения и повышения уровня профессиональных знаний.

Появлению и развитию гастрономического туризма способствовало несколько факторов:

- потребность в пище относится к физиологическим потребностям, необходимым для выживания индивида и является первичной потребностью человека (по А. Маслоу);
- рост доходов населения и увеличение затрат на питание и отдых;
- питание — неотъемлемая часть индустрии гостеприимства;
- обеспокоенность населения проблемами экологичности и качества продуктов питания;
- приобретение мировой известности шеф-поварами лучших ресторанов на волне моды на ресторанные бренды;
- рост популярности телевизионных кулинарных шоу и программ;
- доступность и привычность посещения ресторанов для части населения, искушенной в вопросах питания;
- осознание предприятиями питания и туристскими организациями огромного потенциала и прибыльности гастрономического туризма в мире.

Туроператоры все чаще отмечают, что люди выбирают места для отдыха не по числу пляжей или памятников истории, а, в том числе, оценивая гастрономическую привлекательность страны. Популярными странами данного направления традиционно стали европейские государства и азиатские страны, такие как Индия, Таиланд, Япония, Китай.

Гастрономические туристы представлены следующими категориями населения:

- туристы, желающие приобщиться к стране через ее национальную кухню;
- туристы-гурманы;
- туристы, которые используют данную поездку в целях обучения или повышения своих профессиональных навыков (рестораторы, сомелье, дегустаторы, ресторанные критики);

- представители туристских компаний, заинтересованные в организации собственных гастротуров или изучении данного направления туризма [2].

Гастрономический тур как услуга — это нечто большее, чем просто путешествие, поскольку он является хорошо продуманным комплексом мероприятий для дегустации традиционных в определенной местности блюд, а также отдельных ингредиентов, не встречающихся больше нигде в мире, имеющих особый вкус.

Гастрономические туры обычно рассчитаны на 6—8 дней. Причем в тур может быть включено не только посещение лучших ресторанов, но и участие в технологии приготовления блюд, традиционном празднике с культурной программой, экскурсии на предприятия, а также посещение кулинарных и винных курсов.

Для организации гастрономического тура следуют правильно поставить цели и задачи, определить ресурсы и возможности той или иной территории. От этого будет меняться концепция разработанного тура, объекты показа и форма работы с туристами на маршруте.

Во-первых, интерес организаторов и туристов вызывает заданная территория, на которой имеется пищевое сырье для гастрономического тура. Во-вторых, внимание туристов может привлечь переработка этого сырья, т. е. технологии, применяющиеся на предприятиях по производству конечного продукта. В-третьих, необходимо организовать дегустацию полученного продукта, которая является одной из самых популярных форм работы с экскурсантами. В-четвертых, желательно наличие точки продажи для приобретения данного продукта для личного употребления и в качестве сувенира.

Одной из форм работы является музей при предприятии или отдельно стоящий музейный комплекс, рассказывающий об истории изготовления продукта, совершенствовании технологий сбора и переработки сырья. Плюсом является наличие площадки с возможностью проведения мастер-классов, дегустаций и тематических праздников.

Так как данный вид туризма имеет общие черты с другими видами, гастрономический туризм может быть частью комплексного тура или же обладать некоторыми признаками других видов туризма, по которым можно провести классификацию:

- сельский («зеленый») гастрономический туризм;
- деловой (городской) гастрономический туризм;
- событийный (фестивальный) гастрономический туризм;
- культурно-познавательный гастрономический туризм.

Сельский гастрономический туризм напрямую связан с агротуризмом. Во время таких туров люди находятся в естественной

природной среде, познают сельскую культуру и быт, стараются изолироваться от современного мира и стремятся жить, как их предки: занимаются собирательством, живут без особых удобств, помогают фермерам заниматься сельскохозяйственными работами и употребляют в пищу экологически чистые продукты. Во время деловых поездок посещаются фабрики, цеха на заводах, знаменитые предприятия питания и «ресторанные цепи», проводятся презентации новых брендов и блюд, мастер-классы.

Событийный или фестивальныи гастрономический тур имеет своей целью посещение конкретного события или гастрономического фестиваля, которые периодически проводятся по всему миру и имеют огромную популярность. Например, сентябрь — время Устричного фестиваля в Ирландии и Октоберфеста в Мюнхене, в июле традиционно проходит праздник испанской национальной еды Сан-Фермин и Бонтон — фестиваль тунца в Италии, а в ноябре во Франции — Божоле Нуво — праздник молодого вина и фестиваль белых трюфелей в Сан-Миниато.

Понятие «культурно-познавательный гастрономический туризм» достаточно абстрактное, так как в данном случае речь идет о комбинированном туре. Это может быть поездка в страну с богатыми кулинарными традициями, знакомство с ее достопримечательностями, включая и особенности кухни во время обедов с элементами национальной кухни.

Можно говорить о роли продовольствия в туризме на разных этапах путешествия:

- предварительное посещение (Pre-Visit): еда из региона потребляется дома, перед поездкой в качестве пробы;
- путешествия до места назначения: во время этой фазы, местные продукты встречаются на пути к месту назначения, например, в самолетах, поездах, иных точках питания по дороге;
- в пункте назначения: это основной этап гастрономического тура, который состоит из дегустации, изучения кулинарии и опыта в месте назначения;
 - путешествия от места назначения;
 - после посещения (Post-Visit): этот этап состоит из потребления и кулинарного впечатления от еды, после возвращения из места назначения [2].

Каждый кулинарный опыт является воспоминанием о месте назначения, каждый запах и вкус укрепляет и восстанавливает воспоминания о поездке. Пища и место связываются между собой, формируя основу, которая включена в современное развитие эконо-

мики впечатлений, и дает возможность увидеть новый вариант использования территории или среды.

Развитие гастрономического туризма может быть перспективным направлением для тех регионов России, которые не обладают значительными туристскими ресурсами, но, при этом, на этих территориях могут быть уникальные этнические особенности, в основе которых может быть знакомство с блюдами национальной кухни. В этом случае турист будет рассматривать местную кухню как способ лучше познакомиться с обычаями, традициями и культурой этого народа [4]. Таким образом, гастрономический туризм может стать основой для развития туризма во многих национальных регионах России.

Список литературы:

1. Гастрономический туризм [Электронный ресурс]. — Режим доступа. — URL: <http://www.gastrotur.ru/gastronomicheskiy-turizm>.
2. Гордин В.Э. Гастрономические бренды дестинаций: подходы и применение. Коллективная монография / В.Э. Гордин, Ю.Г. Трабская. — СПб.: Левша-Санкт-Петербург, 2014. — 208 с.
3. Железова О.Р. Этнический гастрономический туризм, его роль в сохранении национальной культуры и самобытности народов / О.Р. Железова // Молодой ученый. — 2013. — № 5. — С. 855—858.
4. Жулина М.А. Приоритетные виды развития туризма в Республике Мордовия / М.А. Жулина, Н.Е. Нехаева, Н.А. Емельянова, Н.Ю. Прасалова, С.В. Сарайкина // Известия Смоленского государственного университета, Смоленск, — 2011. — № 4 (16). — С. 47—55.

Научное издание

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам
XXXIV международной научно-практической конференции

№ 9 (33)
Сентябрь 2015 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 16.09.15. Формат бумаги 60x84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,5. Тираж 550 экз.

Издательство АНС «СибАК»
630049, г. Новосибирск, Красный проспект, 165, офис 4.
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3